Wissenschaft der Logik, 1. Buch - Die Lehre vom Sein - Die Quantität 2/2

Unendliche Größen, Verhältnis von Größen

G.W.F. Hegel

Inhalt

C. DIE QUANTITATIVE UNENDLICHKEIT [Unendliche Größen]

a. Begriff derselben [Mathematische Unendlichkeit]

Das Quantum verändert sich und wird ein anderes Quantum;
die weitere Bestimmung dieser Veränderung,
daß sie ins Unendliche fortgeht, liegt darin,
daß das Quantum als an ihm selbst sich widersprechend gestellt ist.

- Das Quantum wird ein Anderes;
es kontinuiert sich aber in sein Anderssein;
das Andere ist also auch ein Quantum.

Aber dieses ist das Andere nicht nur eines Quantums,
sondern des Quantums selbst,
das Negative seiner als eines Begrenzten,
somit seine Unbegrenztheit, Unendlichkeit.

Das Quantum ist ein Sollen;
es enthält, für sich bestimmt zu sein,
und dieses Fürsichbestimmtsein
ist vielmehr das Bestimmtsein in einem Anderen;
und umgekehrt ist es das aufgehobene Bestimmtsein in einem Anderen,
ist gleichgültiges Bestehen-für-sich. ((260))

Die Endlichkeit und Unendlichkeit erhalten dadurch sogleich
jede an ihr selbst eine gedoppelte, und zwar entgegengesetzte Bedeutung.

Endlich ist das Quantum erstens als Begrenztes überhaupt,
zweitens, als das Hinausschicken über sich selbst,
als das Bestimmtsein in einem Anderen.

Die Unendlichkeit desselben aber ist erstens sein Nichtbegrenztsein;
zweitens sein Zurückgekehrtsein-in-sich, das gleichgültige Fürsichsein.

Vergleichen wir sogleich diese Momente miteinander, so ergibt sich,
daß die Bestimmung der Endlichkeit des Quantums,
das Hinausschicken über sich zu einem Anderen,
in dem seine Bestimmung liege,

ebenso Bestimmung des Unendlichen ist;
die Negation der Grenze ist dasselbe Hinaus über die Bestimmtheit,
so daß das Quantum in dieser Negation, dem Unendlichen,
seine letzte Bestimmtheit habe.

Das andere Moment der Unendlichkeit
ist das gegen die Grenze gleichgültige Fürsichsein;
das Quantum selbst aber ist so das Begrenzte,
daß es das für sich Gleichgültige gegen seine Grenze,
damit gegen andere Quanta und sein Hinaus, ist.

Die Endlichkeit und die
(von ihr getrennt sein sollende, schlechte) Unendlichkeit
haben beim Quantum jede das Moment der anderen bereits an ihr.

Das qualitative und quantitative Unendliche unterscheiden sich dadurch,
daß im ersten der Gegensatz des Endlichen und Unendlichen qualitativ ist
und der Übergang des Endlichen in das Unendliche
oder die Beziehung beider aufeinander nur im Ansich, in ihrem Begriffe liegt.

Die qualitative Bestimmtheit ist als unmittelbar
und bezieht sich auf das Anderssein wesentlich als auf ein ihr anderes Sein;
sie ist nicht gesetzt, ihre Negation, ihr Anderes an ihr selbst zu haben.

Die größe hingegen ist, als solche, aufgehobene Bestimmtheit;
sie ist gesetzt, ungleich mit sich und gleichgültig gegen sich selbst,
daher das Veränderliche zu sein.

Das qualitative Endliche und Unendliche
stehen sich daher absolut, d. h. abstrakt gegenüber;
ihre Einheit ist die zugrunde liegende innerliche Beziehung;
das Endliche kontinuiert sich daher nur an sich,
aber nicht an ihm, in sein Anderes.

Hingegen ((261)) das quantitative Endliche
bezieht sich an ihm selbst in sein Unendliches,
an dem es seine absolute Bestimmtheit habe.

Diese ihre Beziehung stellt zunächst der quantitativ-unendliche Progreß dar.

b. Der quantitative unendliche Progreß [Folgen]

Der Progreß ins Unendliche ist überhaupt der Ausdruck des Widerspruchs,
hier desjenigen, den das quantitativ Endliche
oder das Quantum überhaupt enthält.

Er ist die Wechselbestimmung des Endlichen und Unendlichen,
die in der qualitativen Sphäre betrachtet worden ist,
mit dem Unterschiede, daß, wie soeben erinnert,
im Quantitativen sich die Grenze an ihr selbst
in ihr Jenseits fortschickt und fortsetzt,
somit umgekehrt auch das quantitativ Unendliche gesetzt ist,
das Quantum an ihm selbst zu haben,
denn das Quantum ist in seinem Außersichsein zugleich es selbst;
seine Äußerlichkeit gehört seiner Bestimmung an.

Der unendliche Progreß ist nun nur der Ausdruck dieses Widerspruchs,
nicht die Auflösung desselben,
aber um der Kontinuität willen der einen Bestimmtheit in ihre andere
führt er eine scheinbare Auflösung in einer Vereinigung beider herbei.

Wie er zunächst gesetzt ist, ist er die Aufgabe des Unendlichen,
nicht die Erreichung desselben:
das perennierende Erzeugen desselben,
ohne über das Quantum selbst hinauszukommen
und ohne daß das Unendliche ein Positives und Gegenwärtiges würde.

Das Quantum hat es in seinem Begriffe, ein Jenseits seiner zu haben.

Dies Jenseits ist erstlich das abstrakte Moment des Nichtseins des Quantums;
dieses löst sich an sich selbst auf;
so bezieht es sich auf sein Jenseits als auf seine Unendlichkeit
nach dem qualitativen Momente des Gegensatzes.

Aber zweitens steht das Quantum in Kontinuität mit diesem Jenseits;
das Quantum besteht eben darin, das Andere seiner selbst,

sich selbst äußerlich zu sein;
also ist dies Äußerliche ebensosehr nicht ein Anderes als das Quantum;
das Jenseits oder das Unendliche ((262)) ist also selbst ein Quantum.

Das Jenseits ist auf diese Weise aus seiner Flucht zurückgerufen
und das Unendliche erreicht.

Aber weil dies zum Diesseits Gewordene wieder ein Quantum ist,
ist nur wieder eine neue Grenze gesetzt worden;
diese, als Quantum, ist auch wieder von sich selbst geflohen,
ist als solches über sich hinaus,
und hat sich in sein Nichtsein, in sein Jenseits von sich selbst repelliert,
das ebenso perennierend zum Quantum wird,
als dieses sich von sich selbst zum Jenseits abstößt.

Die Kontinuität des Quantums in sein Anderes bringt die Verbindung beider
in dem Ausdruck eines Unendlichgroßen oder Unendlichkleinen hervor.

Da beide die Bestimmung des Quantums noch an ihnen haben,
bleiben sie veränderliche,
und die absolute Bestimmtheit, die ein Fürsichsein wäre, ist also nicht erreicht.

Dies Außersichsein der Bestimmung ist in dem gedoppelten Unendlichen,
das sich nach dem Mehr und Weniger entgegengesetzt ist,
dem Unendlichgroßen und -kleinen gesetzt.

An jedem selbst ist das Quantum
im perennierenden Gegensatze gegen sein Jenseits erhalten.

Das große, noch so sehr erweitert,
schwindet zur Unbeträchtlichkeit zusammen;
indem es sich auf das Unendliche als auf sein Nichtsein bezieht,
ist der Gegensatz qualitativ;
das erweiterte Quantum hat daher dem Unendlichen nichts abgewonnen;
dieses ist vor wie nach das Nichtsein desselben.

Oder die Vergrößerung des Quantums ist keine Näherung zum Unendlichen,
denn der Unterschied des Quantums und seiner Unendlichkeit
hat wesentlich auch das Moment, ein nicht quantitativer Unterschied zu sein.

Es ist nur der ins Engere gebrachte Ausdruck des Widerspruchs;
es soll ein großes, d. i. ein Quantum,
und unendlich, d. i. kein Quantum sein.

- Ebenso das Unendlichkleine ist als Kleines ein Quantum
und bleibt daher absolut,
d. h. qualitativ zu groß für das Unendliche
und ist diesem entgegengesetzt.

Es bleibt in beiden der Widerspruch des unendlichen Progresses erhalten,
der in ihnen sein Ziel gefunden haben sollte.

Diese Unendlichkeit,
welche als das Jenseits des Endlichen ((263)) beharrlich bestimmt ist,
ist als die schlechte quantitative Unendlichkeit zu bezeichnen.

Sie ist wie die qualitative schlechte Unendlichkeit,
das perennierende Herüber- und Hinübergehen
von dem einen Gliede des bleibenden Widerspruchs zum anderen,
von der Grenze zu ihrem Nichtsein,
von diesem aufs neue zurück zu ebenderselben, zur Grenze.

Im Progresse des Quantitativen ist das, zu dem fortgegangen wird,
zwar nicht ein abstrakt Anderes überhaupt,
sondern ein als verschieden gesetztes Quantum;
aber es bleibt auf gleiche Weise im Gegensatze gegen seine Negation.

Der Progreß ist daher gleichfalls nicht ein Fortgehen und Weiterkommen,
sondern ein Wiederholen von einem und eben demselben,
Setzen, Aufheben und widersetzen und Wiederaufheben,
- eine Ohnmacht des Negativen, dem das, was es aufhebt,
durch sein Aufheben selbst als ein Kontinuierliches wiederkehrt.

Es sind zwei so zusammengeknüpft, daß sie sich schlechthin fliehen;
und indem sie sich fliehen, können sie sich nicht trennen,
sondern sind in ihrer gegenseitigen Flucht verknüpft.

Anmerkung 1: Die hohe Meinung von dem Progreß ins Unendliche
Die schlechte Unendlichkeit pflegt vornehmlich
in der Form des Progresses des Quantitativen ins Unendliche
- dies fortgehende Überfliegen der Grenze,
das die Ohnmacht ist, sie aufzuheben,
und der perennierende Rückfall in dieselbe -
für etwas Erhabenes und für eine Art von Gottesdienst gehalten zu werden,
so wie derselbe in der Philosophie als ein Letztes angesehen worden ist.

Dieser Progreß hat vielfach zu Tiraden gedient,
die als erhabene Produktionen bewundert worden sind.

In der Tat aber macht diese moderne Erhabenheit
nicht den Gegenstand groß, welcher vielmehr entflieht,
sondern nur das Subjekt, das so große Quantitäten in sich verschlingt.

Die Dürftigkeit dieser subjektiv bleibenden Erhebung,
die an der Leiter des Quantitativen hinaufsteigt,
tut sich selbst damit kund,
daß sie in vergeblicher Arbeit
dem unendlichen Ziele nicht näherzukommen ((264)) eingesteht,
welches zu erreichen freilich ganz anders anzugreifen ist.

Bei folgenden Tiraden dieser Art ist zugleich ausgedrückt,
in was solche Erhebung übergeht und aufhört.

Kant z. B. führt es als erhaben auf (Kritik der praktischen Vernunft, Beschluß),
>wenn das Subjekt mit dem Gedanken sich über den Platz erhebt,
den es in der Sinnenwelt einnimmt,
und die Verknüpfung ins unendlich große erweitert,
eine Verknüpfung mit Sternen über Sternen,
mit Welten über Welten, Systemen über Systemen,
überdem noch in grenzenlose Zeiten ihrer periodischen Bewegung,
deren Anfang und Fortdauer.

- Das Vorstellen erliegt diesem Fortgehen ins Unermeßlich-Ferne,

wo die fernste Welt immer noch eine fernere hat,
die so weit zurückgeführte Vergangenheit noch eine weitere hinter sich,
die noch so weit hinausgeführte Zukunft immer noch eine andere vor sich;
der Gedanke erliegt dieser Vorstellung des Unermeßlichen;
wie ein Traum, daß einer einen langen Gang immer weiter
und unabsehbar weiter fortgehe, ohne ein Ende abzusehen,
mit Fallen oder mit Schwindel endet.<

Diese Darstellung, außerdem daß sie den Inhalt des quantitativen Erhebens
in einen Reichtum der Schilderung zusammendrängt,
verdient wegen der Wahrhaftigkeit vornehmlich Lob,
mit der sie es angibt, wie es dieser Erhebung am Ende ergeht:
der Gedanke erliegt, das Ende ist Fallen und Schwindel.

Was den Gedanken erliegen macht
und das Fallen desselben und den Schwindel hervorbringt,
ist nichts anderes als die Langeweile der Wiederholung,
welche eine Grenze verschwinden
und wieder auftreten und wieder verschwinden,
so immer das eine um das andere und eins im anderen,
in dem Jenseits das Diesseits, in dem Diesseits das Jenseits
perennierend entstehen und vergehen läßt
und nur das Gefühl der Ohnmacht
dieses Unendlichen oder dieses Sollens gibt,
das über das Endliche Meister werden will und nicht kann.

Auch die Hallersche,
von Kant so genannte schauderhafte Beschreibung der Ewigkeit
pflegt besonders bewundert zu ((265)) werden,
aber oft gerade nicht wegen derjenigen Seite,
die das wahrhafte Verdienst derselben ausmacht:

Ich häufe ungeheure Zahlen,
Gebirge Millionen auf,
Ich setze Zeit auf Zeit und Welt auf Welt zu Hauf,
Und wenn ich von der grausen Höh
Mit Schwindel wieder nach dir seh,
Ist alle Macht der Zahl, vermehrt zu tausendmalen,

Noch nicht ein Teil von dir.
Ich zieh sie ab, und du liegst ganz vor mir. °

Wenn auf jenes Aufbürgen und Auftürmen von Zahlen und Welten
als auf eine Beschreibung der Ewigkeit der Wert gelegt wird,
so wird übersehen, daß der Dichter selbst
dieses sogenannte schauderhafte Hinausgehen
für etwas Vergebliches und Hohles erklärt
und daß er damit schließt, daß nur durch das Aufgeben
dieses leeren unendlichen Progresses
das wahrhafte Unendliche selbst zur Gegenwart vor ihn komme.

Es hat Astronomen gegeben,
die sich auf das Erhabene ihrer Wissenschaft gern darum viel zugute taten,
weil sie mit einer unermeßlichen Menge von Sternen,
mit so unermeßlichen Räumen und Zeiten zu tun habe,
in denen Entfernungen und Perioden, die für sich schon so groß sind,
zu Einheiten dienen, welche, noch so vielmal genommen,
sich wieder zur Unbedeutendheit verkürzen.

Das schale Erstaunen, dem sie sich dabei überlassen,
die abgeschmackten Hoffnungen,
erst noch in jenem Leben von einem Sterne zum andern zu reisen
und ins Unermeßliche fort dergleichen neue Kenntnisse zu erwerben,
gaben sie für ein Hauptmoment der Vortrefflichkeit ihrer Wissenschaft aus,
- welche bewundernswürdig ist,
nicht um solcher quantitativen Unendlichkeit willen,
sondern ((266)) im Gegenteil um der Maßverhältnisse und der Gesetze willen,
welche die Vernunft in diesen Gegenständen erkennt
und die das vernünftige Unendliche
gegen jene unvernünftige Unendlichkeit sind.

Der Unendlichkeit, die sich auf die äußere sinnliche Anschauung bezieht,
setzt Kant die andere Unendlichkeit gegenüber,
wenn >das Individuum auf sein unsichtbares Ich zurückgeht
und die absolute Freiheit seines Willens als ein reines Ich
allen Schrecken des Schicksals und der Tyrannei entgegenstellt,

von seinen nächsten Umgebungen anfangend,
sie für sich verschwinden,
ebenso das, was als dauernd erscheint,
Welten über Welten in Trümmer zusammenstürzen läßt
und einsam sich als sich selbst gleich erkennt<.

Ich in dieser Einsamkeit mit sich ist zwar das erreichte Jenseits,
es ist zu sich selbst gekommen, ist bei sich, diesseits;
im reinen Selbstbewußtsein ist die absolute Negativität
zur Affirmation und Gegenwart gebracht,
welche in jenem Fortgehen über das sinnliche Quantum nur flieht.

Aber indem dies reine Ich
in seiner Abstraktion und Inhaltslosigkeit sich fixiert,
hat es das Dasein überhaupt,
die Fülle des natürlichen und geistigen Universums,
als ein Jenseits sich gegenüber.

Es stellt sich derselbe Widerspruch dar,
der dem unendlichen Progresse zugrunde liegt;
nämlich ein Zurückgekehrtsein in sich,
das unmittelbar zugleich Außersichsein,
Beziehung auf sein Anderes als auf sein Nichtsein, ist;
welche Beziehung eine Sehnsucht bleibt,
weil Ich sich seine gehaltlose und unhaltbare Leere einerseits
und die in der Negation doch präsent bleibende Fülle
als sein Jenseits fixiert hat.

Kant fügt diesen beiden Erhabenheiten die Bemerkung bei,
»daß Bewunderung (für die erstere, äußerliche)
und Achtung (für die zweite, innerliche) Erhabenheit
zwar zur Nachforschung reizen,
aber den Mangel derselben nicht ersetzen können<.

- Er erklärt damit jene Erhebungen als unbefriedigend für die Vernunft,
welche bei ihnen und den damit verbundenen Empfindungen
nicht stehenbleiben
und das Jenseits und Leere nicht für das Letzte gelten lassen kann. ((267))

Als ein Letztes aber ist der unendliche Progreß
vornehmlich in seiner Anwendung auf die Moralität genommen worden.

Der soeben angeführte zweite Gegensatz des Endlichen und Unendlichen
als der mannigfaltigen Welt und des in seine Freiheit erhobenen Ichs
ist zunächst qualitativ.

Das Selbstbestimmen des Ich geht zugleich darauf,
die Natur zu bestimmen und sich von ihr zu befreien;
so bezieht es sich durch sich selbst auf sein Anderes,
welches als äußerliches Dasein ein Vielfältiges
und auch Quantitatives ist.

Die Beziehung auf ein Quantitatives wird selbst quantitativ;
die negative Beziehung des Ich darauf,
die Macht des Ich über das Nicht-Ich, über die Sinnlichkeit und äußere Natur,
wird daher so vorgestellt, daß die Moralität immer größer,
die Macht der Sinnlichkeit aber immer kleiner werden könne und solle.

Die völlige Angemessenheit aber des Willens zum moralischen Gesetze
wird in den ins Unendliche gehenden Progreß verlegt,
d. h. als ein absolutes unerreichbares Jenseits vorgestellt,
und eben dies solle der wahre Anker und der rechte Trost sein,
daß es ein Unerreichbares ist;
denn die Moralität soll als Kampf sein;
dieser aber ist nur unter der Unangemessenheit des Willens zum Gesetze,
dieses damit schlechthin ein Jenseits für ihn.

In diesem Gegensatze werden Ich und Nicht-Ich
oder der reine Wille und das moralische Gesetz
und die Natur und Sinnlichkeit des Willens
als vollkommen selbständig und gleichgültig gegeneinander vorausgesetzt.

Der reine Wille hat sein eigentümliches Gesetz,
das in wesentlicher Beziehung auf die Sinnlichkeit steht;
und die Natur und Sinnlichkeit hat ihrerseits Gesetze,
die weder aus dem Willen genommen und ihm entsprechend sind,

noch auch nur, wenngleich verschieden davon,
an sich eine wesentliche Beziehung auf ihn hätten,
sondern sie sind überhaupt für sich bestimmt,
in sich fertig und geschlossen.

Zugleich sind beide aber
Momente eines und desselben einfachen Wesens, des Ich;
der Wille ist als das Negative gegen die Natur bestimmt,
so daß er nur ist, insofern ein solches von ihm Verschiedenes ist,
das von ((268)) ihm aufgehoben werde,
von dem er aber hierin berührt und selbst affiziert ist.

Der Natur und ihr als Sinnlichkeit des Menschen
ist als einem selbständigen System von Gesetzen
das Beschränken durch ein Anderes gleichgültig;
sie erhält sich in diesem Begrenztwerden,
tritt selbständig in die Beziehung ein
und begrenzt den Willen des Gesetzes ebensosehr, als er sie begrenzt.

- Es ist ein Akt, daß der Wille sich bestimmt
und das Anderssein einer Natur aufhebt
und daß dies Anderssein als daseiend gesetzt ist,
sich in sein Aufgehobenwerden kontinuiert und nicht aufgehoben ist.

Der Widerspruch, der hierin liegt,
wird im unendlichen Progresse nicht aufgelöst,
sondern im Gegenteil als unaufgelöst
und unauflösbar dargestellt und behauptet;
der Kampf der Moralität und der Sinnlichkeit
wird vorgestellt als das an und für sich seiende, absolute Verhältnis.

Die Ohnmacht, über den qualitativen Gegensatz
des Endlichen und Unendlichen Meister zu werden
und die Idee des wahrhaften Willens, die substantielle Freiheit, zu fassen,
nimmt zur größe ihre Zuflucht, um sie als die Mittlerin zu gebrauchen,
weil sie das aufgehobene Qualitative,
der gleichgültig gewordene Unterschied ist.

Allein indem beide Glieder des Gegensatzes

als qualitativ verschieden zugrunde liegen bleiben,
so wird vielmehr dadurch,
daß sie sich in ihrer gegenseitigen Beziehung als Quanta verhalten,
jedes sogleich als gegen diese Veränderung gleichgültig gesetzt.

Die Natur wird durch Ich,
die Sinnlichkeit durch den Willen des Guten bestimmt;
die durch denselben an ihr hervorgebrachte Veränderung
ist nur ein quantitativer Unterschied,
ein solcher, der sie als das bestehen läßt, was sie ist.

In der abstrakteren Darstellung der Kantischen Philosophie
oder wenigstens ihrer Prinzipien,
nämlich in der Fichteschen Wissenschaftslehre,
macht der unendliche Progreß auf dieselbe Weise
die Grundlage und das Letzte aus.

Auf den ersten Grundsatz dieser Darstellung, Ich = Ich,
folgt ein zweiter, davon unabhängiger, die Entgegensetzung des Nicht-Ich;
die Beziehung beider wird sogleich auch
als quantitativer ((269)) Unterschied angenommen,
daß Nicht-Ich zum Teil durch Ich bestimmt werde, zum Teil auch nicht.

Das Nicht-Ich kontinuiert sich auf diese Weise in sein Nichtsein so,
daß es in seinem Nichtsein entgegengesetzt bleibt als ein nicht Aufgehobenes.

Nachdem daher die Widersprüche, die darin liegen,
im System entwickelt worden sind,
so ist das schließliche Resultat dasjenige Verhältnis,
welches der Anfang war;
das Nicht-Ich bleibt ein unendlicher Anstoß, ein absolut Anderes;
die letzte Beziehung seiner und des Ich aufeinander
ist der unendliche Progreß, Sehnsucht und Streben,
- derselbe Widerspruch, mit welchem angefangen wurde.

Weil das Quantitative die als aufgehoben gesetzte Bestimmtheit ist,
so glaubte man für die Einheit des Absoluten, für die eine Substantialität
viel oder vielmehr alles gewonnen zu haben,

indem man den Gegensatz überhaupt
zu einem nur quantitativen Unterschiede herabsetzte.

»Aller Gegensatz ist nur quantitativ«
war einige Zeit ein Hauptsatz neuerer Philosophie;
die entgegengesetzten Bestimmungen haben dasselbe Wesen,
denselben Inhalt,
sie sind reale Seiten des Gegensatzes,
insofern jede derselben seine beiden Bestimmungen,
beiden Faktoren in ihr hat,
nur daß auf der einen Seite der eine Faktor,
auf der anderen der andere überwiegend,
in der einen Seite der eine Faktor, eine Materie oder Tätigkeit,
in größerer Menge oder in stärkerem Grade vorhanden sei als in der anderen.

Insofern verschiedene Stoffe oder Tätigkeiten vorausgesetzt werden,
bestätigt und vollendet der quantitative Unterschied vielmehr
deren Äußerlichkeit und Gleichgültigkeit gegeneinander
und gegen ihre Einheit.

Der Unterschied der absoluten Einheit soll nur quantitativ sein;
das Quantitative ist zwar die aufgehobene unmittelbare Bestimmtheit,
aber die nur unvollkommene, erst die erste Negation,
nicht die unendliche, nicht die Negation der Negation.

- Indem Sein und Denken
als quantitative Bestimmungen der absoluten Substanz vorgestellt werden,
werden auch sie als Quanta,
wie in untergeordneter Sphäre der Kohlenstoff, Stickstoff usf.,
sich vollkommen ((270)) äußerlich und beziehungslos.

Es ist ein Drittes, eine äußerliche Reflexion,
welche von ihrem Unterschiede abstrahiert
und ihre innere, nur ansichseiende,
nicht ebenso fürsichseiende Einheit erkennt.

Diese Einheit wird damit in der Tat nur als erste unmittelbare vorgestellt
oder nur als Sein, welches in seinem quantitativen Unterschiede
sich gleich bleibt, aber nicht sich durch sich selbst gleich setzt;
es ist somit nicht begriffen als Negation der Negation, als unendliche Einheit.

Nur im qualitativen Gegensatze
geht die gesetzte Unendlichkeit, das Fürsichsein, hervor,
und die quantitative Bestimmung selbst geht,
wie sich sogleich näher ergeben wird,
in das Qualitative über.

Anmerkung 2: Die Kantische Antinomie der Begrenztheit und Unbegrenztheit der Welt in Zeit und Raum

Es ist oben erinnert worden, daß die Kantischen Antinomien
Darstellungen des Gegensatzes des Endlichen und Unendlichen
in einer konkreteren Gestalt,
auf speziellere Substrakte der Vorstellung angewendet, sind.

Die daselbst betrachtete Antinomie
enthielt den Gegensatz der qualitativen Endlichkeit und Unendlichkeit.

In einer anderen, der ersten der vier kosmologischen Antinomien,
ist es mehr die quantitative Grenze,
die in ihrem Widerstreite betrachtet wird [Kritik der reinen Vernunft,B 454 ff.].

Ich will die Untersuchung dieser Antinomie daher hier anstellen.

Sie betrifft die Begrenztheit oder Unbegrenztheit der Welt in Zeit und Raum.

- Es konnte ebensogut dieser Gegensatz
auch in Rücksicht auf Zeit und Raum selbst betrachtet werden,
denn ob Zeit und Raum Verhältnisse der Dinge selbst
oder aber nur Formen der Anschauung sind,
ändert nichts für das Antinomische
der Begrenztheit oder Unbegrenztheit in ihnen.

Die nähere Auseinanderlegung dieser Antinomie wird gleichfalls zeigen,
daß die beiden Sätze und ebenso ihre Beweise,
die wie bei der oben betrachteten apogogisch geführt sind,

auf nichts als auf die zwei einfachen, entgegengesetzten Behauptungen hinauslaufen:
es ist eine Grenze, und: es muss über die Grenze hinausgegangen werden. ((271))

Die Thesis ist:

»Die Welt hat einen Anfang in der Zeit
und ist dem Raum nach auch in Grenzen eingeschlossen.«

Der eine Teil des Beweises, die Zeit betreffend, nimmt das Gegenteil an,

». . . die Welt habe der Zeit nach keinen Anfang:
so ist bis zu jedem gegebenen Zeitpunkt eine Ewigkeit abgelaufen
und mithin eine unendliche Reihe aufeinander folgender Zustände der Dinge
in der Welt verflossen.

Nun besteht aber eben darin die Unendlichkeit einer Reihe,
daß sie durch sukzessive Synthesis niemals vollendet sein kann.

Also ist eine unendliche verflossene Weltreihe unmöglich,
mithin ein Anfang der Welt eine notwendige Bedingung ihres Daseins;
welches zuerst zu erweisen war.«

Der andere Teil des Beweises, der den Raum betrifft,
wird auf die Zeit zurückgeführt.

Das Zusammenfassen der Teile einer im Raume unendlichen Welt
erforderte eine unendliche Zeit,
welche als abgelaufen angesehen werden müßte,
insofern die Welt im Raume nicht als ein Werdendes,
sondern als ein vollendetes Gegebenes anzusehen ist.

Von der Zeit aber wurde im ersten Teile des Beweises gezeigt,
daß eine unendliche Zeit als abgelaufen anzunehmen unmöglich sei.

Man sieht aber sogleich, daß es unnötig war,
den Beweis apogogisch zu machen

oder überhaupt einen Beweis zu führen,
indem in ihm selbst unmittelbar die Behauptung dessen zugrunde liegt,
was bewiesen werden sollte.

Es wird nämlich irgendein oder jeder gegebene Zeitpunkt angenommen,
bis zu welchem eine Ewigkeit
(Ewigkeit hat hier nur den geringen Sinn einer schlecht-unendlichen Zeit)
abgelaufen sei.

Ein gegebener Zeitpunkt heißt nun
nichts anderes als eine bestimmte Grenze in der Zeit.

Im Beweise wird also eine Grenze der Zeit als wirklich vorausgesetzt;
sie ist aber eben das, was bewiesen werden sollte.

Denn die Thesis besteht darin, daß die Welt einen Anfang in der Zeit habe.

Nur der Unterschied findet statt, daß die angenommene Zeitgrenze
ein Jetzt als Ende der vorher verflossenen,
die zu ((272)) beweisende aber Jetzt als Anfang einer Zukunft ist.

Allein dieser Unterschied ist unwesentlich.

Jetzt wird als der Punkt angenommen, in welchem eine unendliche Reihe
aufeinander folgender Zustände der Dinge in der Welt verflossen sein soll,
also als Ende, als qualitative Grenze.

Würde dies Jetzt nur als quantitative Grenze betrachtet, welche fließend
und über die nicht nur hinauszugehen,
sondern die vielmehr nur dies sei, über sich hinauszugehen,
so wäre die unendliche Zeitreihe in ihr nicht verflossen,
sondern führe fort zu fließen,
und das Räsonnement des Beweises fiele weg.

Dagegen ist der Zeitpunkt
als qualitative Grenze für die Vergangenheit angenommen,
aber ist so zugleich Anfang für die Zukunft
- denn an sich ist jeder Zeitpunkt die Beziehung
der Vergangenheit und der Zukunft -,

auch ist er absoluter, d. h. abstrakter Anfang für dieselbe,
d. i. das, was bewiesen werden sollte.

Es tut nichts zur Sache, daß vor seiner Zukunft
und diesem ihrem Anfange derselben
schon eine Vergangenheit ist;
indem dieser Zeitpunkt qualitative Grenze ist
- und als qualitative ihn anzunehmen,
liegt in der Bestimmung des Vollendeten, Abgelaufenen,
also sich nicht Kontinuierenden -,
so ist die Zeit in ihm abgebrochen
und jene Vergangenheit ohne Beziehung auf diejenige Zeit,
welche nur Zukunft in Rücksicht auf diese Vergangenheit
genannt werden konnte
und daher ohne solche Beziehung nur Zeit überhaupt ist,
die einen absoluten Anfang hat.

Stünde sie aber (wie sie es denn tut)
durch das Jetzt, den gegebenen Zeitpunkt,
in einer Beziehung auf die Vergangenheit,
wäre sie somit als Zukunft bestimmt,
so wäre auch dieser Zeitpunkt von der andern Seite keine Grenze,
die unendliche Zeitreihe kontinuierte sich in dem, was Zukunft hieß,
und wäre nicht, wie angenommen worden, vollendet.

In Wahrheit ist die Zeit reine Quantität;
der im Beweise gebrauchte Zeitpunkt,
in welchem sie unterbrochen sein sollte,
ist vielmehr nur das sich selbst aufhebende Fürsichsein des Jetzt.

Der Beweis leistet nichts,
als daß er die in der ((273)) Thesis behauptete absolute Grenze der Zeit
als einen gegebenen Zeitpunkt vorstellig macht
und ihn als vollendeten, d. i. abstrakten Punkt geradezu annimmt,
- eine populäre Bestimmung,
welche das sinnliche Vorstellen leicht als eine Grenze passieren,
somit im Beweise dies als Annahme gelten läßt,
was vorher als das zu Beweisende aufgestellt wurde.

Die Antithesis heißt:

»Die Welt hat keinen Anfang und keine Grenzen im Raume,
sondern ist sowohl in Ansehung der Zeit als des Raumes unendlich.«

Der Beweis setzt gleichfalls das Gegenteil:

»Die Welt habe einen Anfang.

Da der Anfang ein Dasein ist, wovor eine Zeit vorhergeht,
darin das Ding nicht ist,
so muss eine Zeit vorhergegangen sein, darin die Welt nicht war,
d. i. eine leere Zeit.

Nun ist aber in einer leeren Zeit kein Entstehen irgendeines Dinges möglich;
weil kein Teil einer solchen Zeit vor einem andern
irgendeine unterscheidende Bedingung des Daseins
vor der des Nichtdaseins an sich hat . . .

Also kann zwar in der Welt manche Reihe der Dinge anfangen,
die Welt selbst aber keinen Anfang nehmen
und ist also in Ansehung der vergangenen Zeit unendlich.«

Dieser apogogische Beweis enthält, wie die anderen,
die direkte und unbewiesene Behauptung dessen, was er beweisen sollte.

Er nimmt nämlich zuerst ein Jenseits des weltlichen Daseins,
eine leere Zeit an,
aber kontinuiert alsdann auch das weltliche Dasein
ebensosehr über sich hinaus in diese leere Zeit hinein,
hebt diese dadurch auf und setzt somit das Dasein ins Unendliche fort.

Die Welt ist ein Dasein;
der Beweis setzt voraus, daß dies Dasein entstehe
und das Entstehen eine in der Zeit vorhergehende Bedingung habe.

Darin aber eben besteht die Antithesis selbst,

daß es kein unbedingtes Dasein, keine absolute Grenze gebe,
sondern das weltliche Dasein immer eine vorhergehende Bedingung fordere.

Das zu Erweisende findet sich somit als Annahme in dem Beweise.

- Die Bedingung wird dann ferner in der leeren Zeit gesucht,
was soviel heißt, als daß sie als zeitlich ((274))
und somit als Dasein und Beschränktes angenommen wird.

Überhaupt also ist die Annahme gemacht,
daß die Welt als Dasein ein anderes bedingtes Dasein in der Zeit voraussetze
und hiermit so fort ins Unendliche.

Der Beweis in Ansehung der Unendlichkeit der Welt im Raume ist dasselbe.

Apogogischerweise wird die räumliche Endlichkeit der Welt gesetzt;
>diese befände sich somit in einem leeren unbegrenzten Raume
und hätte ein Verhältnis zu ihm;
ein solches Verhältnis der Welt zu keinem Gegenstande aber ist nichts<.

Was bewiesen werden sollte, ist hier ebenso im Beweise direkt vorausgesetzt.

Es wird direkt angenommen, daß die begrenzte räumliche Welt
sich in einem leeren Raume befinden und ein Verhältnis zu ihm haben sollte,
d. h. daß über sie hinausgegangen werden müsse,
- einerseits in das Leere, in das Jenseits und Nichtsein derselben,
andererseits aber daß sie damit im Verhältnis stehe,
d. i. sich darein hinein kontinuiere,
das Jenseits hiermit mit weltlichem Dasein erfüllt vorzustellen sei.

Die Unendlichkeit der Welt im Raume, die in der Antithesis behauptet wird,
ist nichts anderes als einerseits der leere Raum,
andererseits das Verhältnis der Welt zu ihm,
d. h. Kontinuität derselben in ihm oder die Erfüllung desselben;
welcher Widerspruch
- der Raum zugleich als leer und zugleich als erfüllt -
der unendliche Progreß des Daseins im Raume ist.

Dieser Widerspruch selbst, das Verhältnis der Welt zum leeren Raume,
ist im Beweise direkt zur Grundlage gemacht.

Die Thesis und Antithesis und die Beweise derselben
stellen daher nichts dar als die entgegengesetzten Behauptungen,
daß eine Grenze ist
und daß die Grenze ebensosehr nur eine aufgehobene ist;
daß die Grenze ein Jenseits hat, mit dem sie aber in Beziehung steht,
wohin über sie hinauszugehen ist,
worin aber wieder eine solche Grenze entsteht, die keine ist.

Die Auflösung dieser Antinomien ist, wie die der obigen, transzendental,
d. h. sie besteht in der Behauptung
der Idealität ((275)) des Raumes und der Zeit als Formen der Anschauung,
in dem Sinne, daß die Welt an ihr selbst
nicht im Widerspruch mit sich, nicht ein sich Aufhebendes,
sondern nur das Bewußtsein in seinem Anschauen
und in der Beziehung der Anschauung auf Verstand und Vernunft
ein sich selbst widersprechendes Wesen sei.

Es ist dies eine zu große Zärtlichkeit für die Welt,
von ihr den Widerspruch zu entfernen,
ihn dagegen in den Geist, in die Vernunft zu verlegen
und darin unaufgelöst bestehen zu lassen.

In der Tat ist es der Geist, der so stark ist,
den Widerspruch ertragen zu können,
aber er ist es auch, der ihn aufzulösen weiß.

Die sogenannte Welt aber
(sie heiße objektive, reale Welt
oder, nach dem transzendentalen Idealismus, subjektives Anschauen
und durch die Verstandeskategorie bestimmte Sinnlichkeit)
entbehrt darum des Widerspruchs nicht und nirgends,
vermag ihn aber nicht zu ertragen
und ist darum dem Entstehen und Vergehen preisgegeben.

c. Die Unendlichkeit des Quantums [Infinitisimalrechnung]

1. [??] Das unendliche Quantum als Unendlichgroßes oder Unendlichkleines
ist selbst an sich der unendliche Progreß;
es ist Quantum als ein großes oder Kleines
und ist zugleich Nichtsein des Quantums.

Das Unendlichgroße und Unendlichkleine sind daher Bilder der Vorstellung,
die bei näherer Betrachtung sich als nichtiger Nebel und Schatten zeigen.

Im unendlichen Progreß aber ist dieser Widerspruch expliziert vorhanden
und damit das, was die Natur des Quantums ist,
das als intensive größe seine Realität erreicht hat
und in seinem Dasein nun gesetzt [ist],
wie es in seinem Begriffe ist.

Diese Identität ist es, die zu betrachten ist.

Das Quantum als Grad ist einfach, auf sich bezogen
und als an ihm selbst bestimmt.

Indem durch diese Einfachheit das Anderssein
und die Bestimmtheit an ihm aufgehoben ist, ist diese ihm äußerlich;
es hat seine Bestimmtheit außer ihm.

Dies sein Außersichsein ist zunächst
das abstrakte Nichtsein ((276)) des Quantums überhaupt,
die schlechte Unendlichkeit.

Aber ferner ist dies Nichtsein auch ein großes;
das Quantum kontinuiert sich in sein Nichtsein,
denn es hat eben seine Bestimmtheit in seiner Äußerlichkeit;
diese seine Äußerlichkeit ist daher ebensosehr selbst Quantum;
jenes sein Nichtsein, die Unendlichkeit, wird so begrenzt,
d. h. dies Jenseits wird aufgehoben,
dieses ist selbst als Quantum bestimmt,
das hiermit in seiner Negation bei sich selbst ist.

Dies ist aber das, was das Quantum als solches an sich ist.

Denn es ist eben es selbst durch sein Äußerlichsein;
die Äußerlichkeit macht das aus, wodurch es Quantum, bei sich selbst ist.

Es ist also im unendlichen Progresse der Begriff des Quantums gesetzt.

Nehmen wir ihn zunächst in seinen abstrakten Bestimmungen,
wie sie vorliegen,
so ist in ihm das Aufheben des Quantums,
aber ebensosehr seines Jenseits, also die Negation des Quantums
sowohl als die Negation dieser Negation vorhanden.

Seine Wahrheit ist ihre Einheit, worin sie, aber als Momente, sind.

- Sie ist die Auflösung des Widerspruchs, dessen Ausdruck er ist,
und ihr nächster Sinn somit die Wiederherstellung des Begriffs der größe,
daß sie gleichgültige oder äußerliche Grenze ist.

Im unendlichen Progresse als solchem pflegt nur darauf reflektiert zu werden,
daß jedes Quantum, es sei noch so groß oder klein, verschwinden,
daß über dasselbe muss hinausgegangen werden können,
aber nicht darauf, daß dies sein Aufheben, das Jenseits,
das schlecht Unendliche selbst auch verschwindet.

Schon das erste Aufheben, die Negation der Qualität überhaupt,
wodurch das Quantum gesetzt wird,
ist an sich das Aufheben der Negation
- das Quantum ist aufgehobene qualitative Grenze,
somit aufgehobene Negation -,
aber es ist zugleich nur an sich dies;
gesetzt ist es als ein Dasein,
und dann ist seine Negation als das Unendliche fixiert,
als das Jenseits des Quantums,
welches als ein Diesseits steht, als ein Unmittelbares;
so ist das Unendliche nur als erste Negation bestimmt,

und so erscheint es im unendlichen Progresse.

Es ((277)) ist gezeigt worden, daß aber in diesem mehr vorhanden ist,
die Negation der Negation oder das, was das Unendliche in Wahrheit ist.

Es ist dies vorhin so angesehen worden,
daß der Begriff des Quantums damit wiederhergestellt ist;
diese Wiederherstellung heißt zunächst,
daß sein Dasein seine nähere Bestimmung erhalten hat;
es ist nämlich das nach seinem Begriff bestimmte Quantum entstanden,
was verschieden ist von dem unmittelbaren Quantum;
die Äußerlichkeit ist nun das Gegenteil ihrer selbst,
als Moment der größe selbst gesetzt,
- das Quantum so, daß es vermittels seines Nichtseins, der Unendlichkeit,
in einem anderen Quantum seine Bestimmtheit habe,
d. i. qualitativ das ist, was es ist.

Jedoch gehört diese Vergleichung des Begriffs des Quantums
mit seinem Dasein mehr unserer Reflexion,
einem Verhältnis, das hier noch nicht vorhanden ist, an.

Die zunächstliegende Bestimmung ist,
daß das Quantum zur Qualität zurückgekehrt,
nunmehr qualitativ bestimmt ist.

Denn seine Eigentümlichkeit, Qualität, ist die Äußerlichkeit,
Gleichgültigkeit der Bestimmtheit;
und es ist nun gesetzt, als in seiner Äußerlichkeit vielmehr es selbst zu sein,
darin sich auf sich selbst zu beziehen,
in einfacher Einheit mit sich, d. i. qualitativ bestimmt zu sein.

- Dies Qualitative ist noch näher bestimmt, nämlich als Fürsichsein;
denn die Beziehung auf sich selbst, zu der es gekommen,
ist aus der Vermittlung, der Negation der Negation, hervorgegangen.

Das Quantum hat die Unendlichkeit, das Fürsichbestimmtsein
nicht mehr außer ihm, sondern an ihm selbst.

Das Unendliche, welches im unendlichen Progresse

nur die leere Bedeutung eines Nichtseins, eines unerreichten,
aber gesuchten Jenseits hat,
ist in der Tat nichts anderes als die Qualität.

Das Quantum geht als gleichgültige Grenze über sich hinaus ins Unendliche;
es sucht damit nichts anderes als das Fürsichbestimmtsein,
das qualitative Moment,
das aber so nur ein Sollen ist.

Seine Gleichgültigkeit gegen die Grenze,
damit sein Mangel an fürsichseiender Bestimmtheit
und sein Hinausgehen über sich
ist, was das Quantum zum Quantum ((278)) macht;
jenes sein Hinausgehen soll negiert werden
und im Unendlichen sich seine absolute Bestimmtheit finden.

Ganz überhaupt:
das Quantum ist die aufgehobene Qualität;
aber das Quantum ist unendlich, geht über sich hinaus,
es ist die Negation seiner;
dies sein Hinausgehen ist also an sich
die Negation der negierten Qualität, die Wiederherstellung derselben;
und gesetzt ist dies, daß die Äußerlichkeit, welche als Jenseits erschien,
als das eigene Moment des Quantums bestimmt ist.

Das Quantum ist hiermit gesetzt als von sich repelliert,
womit also zwei Quanta sind,
die jedoch aufgehoben, nur als Momente einer Einheit sind,
und diese Einheit ist die Bestimmtheit des Quantums.

- Dieses so in seiner Äußerlichkeit als gleichgültige Grenze
auf sich bezogen, hiermit qualitativ gesetzt,
ist das quantitative Verhältnis.

- Im Verhältnisse ist das Quantum sich äußerlich, von sich selbst verschieden;
diese seine Äußerlichkeit
ist die Beziehung eines Quantums auf ein anderes Quantum,
deren jedes nur gilt in dieser seiner Beziehung auf sein Anderes;

und diese Beziehung macht die Bestimmtheit des Quantums aus,
das als solche Einheit ist.

Es hat darin nicht eine gleichgültige, sondern qualitative Bestimmung,
ist in dieser seiner Äußerlichkeit in sich zurückgekehrt,
ist in derselben das, was es ist.

Anmerkung 1: Die Begriffsbestimmtheit des mathematischen Unendlichen
Das mathematische Unendliche ist
einesteils interessant durch die Erweiterung der Mathematik
und die großen Resultate,
welche seine Einführung in dieselbe hervorgebracht hat;
andernteils aber ist es dadurch merkwürdig,
daß es dieser Wissenschaft noch nicht gelungen ist,
sich über den Gebrauch desselben
durch den Begriff (Begriff im eigentlichen Sinne genommen) zu rechtfertigen.

Die Rechtfertigungen beruhen am Ende
auf der Richtigkeit der mit Hilfe jener Bestimmung sich ergebenden Resultate,
welche aus sonstigen Gründen erwiesen ist,
nicht aber auf der Klarheit des Gegenstandes ((279))
und der Operation, durch welche die Resultate herausgebracht werden,
sogar daß die Operation vielmehr selbst als unrichtig zugegeben wird.

Dies ist schon ein Mißstand an und für sich;
ein solches Verfahren ist unwissenschaftlich.

Es führt aber auch den Nachteil mit sich,
daß die Mathematik, indem sie die Natur dieses ihres Instruments nicht kennt,
weil sie mit der Metaphysik und Kritik desselben nicht fertig ist,
den Umfang seiner Anwendung nicht bestimmen
und vor Mißbräuchen desselben sich nicht sichern konnte.

In philosophischer Rücksicht aber

ist das mathematische Unendliche darum wichtig,
weil ihm in der Tat der Begriff des wahrhaften Unendlichen zugrunde liegt
und es viel höher steht als das gewöhnlich
so genannte metaphysische Unendliche,
von dem aus die Einwürfe gegen ersteres gemacht werden.

Gegen diese Einwürfe weiß sich die Wissenschaft der Mathematik
häufig nur dadurch zu retten,
daß sie die Kompetenz der Metaphysik verwirft, indem sie behauptet,
mit dieser Wissenschaft nichts zu schaffen
und sich um deren Begriffe nicht zu bekümmern zu haben,
wenn sie nur auf ihrem eigenen Boden konsequent verfahre.

Sie habe nicht zu betrachten, was an sich,
sondern was auf ihrem Felde das Wahre sei.

Die Metaphysik weiß die glänzenden Resultate
des Gebrauchs des mathematischen Unendlichen
bei ihrem Widerspruche gegen dasselbe nicht zu leugnen oder umzustoßen,
und die Mathematik weiß mit der Metaphysik ihres eigenen Begriffs
und daher auch mit der Ableitung der Verfahrungsweisen,
die der Gebrauch des Unendlichen nötig macht,
nicht ins Reine zu kommen.

Wenn es die einzige Schwierigkeit des Begriffs überhaupt wäre,
von der die Mathematik gedrückt würde,
so könnte sie diesen ohne Umstände auf der Seite liegenlassen,
insofern nämlich der Begriff mehr ist
als nur die Angabe der wesentlichen Bestimmtheiten,
d. i. der Verstandesbestimmungen einer Sache,
und an der Schärfe dieser Bestimmtheiten hat sie es nicht fehlen lassen;
denn sie ist nicht eine Wissenschaft ((280)),
die es mit den Begriffen ihrer Gegenstände zu tun
und durch die Entwicklung des Begriffs,
wenn auch nur durch Räsonnement ihren Inhalt zu erzeugen hätte.

Allein bei der Methode ihres Unendlichen
findet sie den Hauptwiderspruch an der eigentümlichen Methode selbst,
auf welcher sie überhaupt als Wissenschaft beruht.

Denn die Rechnung des Unendlichen erlaubt und erfordert Verfahrungsweisen,
welche die Mathematik bei Operationen mit endlichen Größen
durchaus verwerfen muss,
und zugleich behandelt sie ihre unendlichen Größen wie endliche Quanta
und will auf jene dieselben Verfahrungsweisen anwenden,
welche bei diesen gelten;
es ist eine Hauptseite der Ausbildung dieser Wissenschaft,
für die transzendenten Bestimmungen und deren Behandlung
die Form des gewöhnlichen Kalküls gewonnen zu haben.

Die Mathematik zeigt bei diesem Widerstreite ihrer Operationen,
daß Resultate, die sie dadurch findet, ganz mit denen übereinstimmen,
welche durch die eigentlich mathematische,
die geometrische und analytische Methode gefunden werden.

Aber teils betrifft dies nicht alle Resultate,
und der Zweck der Einführung des Unendlichen ist nicht allein,
den gewöhnlichen Weg abzukürzen,
sondern zu Resultaten zu gelangen,
die durch diesen nicht geleistet werden können.

Teils rechtfertigt der Erfolg die Manier des Wegs nicht für sich.

Diese Manier aber der Rechnung des Unendlichen
zeigt sich durch den Schein der Ungenauigkeit gedrückt,
den sie sich gibt, indem sie endliche Größen
um eine unendlich kleine größe das eine Mal vermehrt,
diese in der ferneren Operation zum Teil beibehält,
aber einen Teil derselben auch vernachlässigt.

Dies Verfahren enthält die Sonderbarkeit, daß,
der eingestandenen Ungenauigkeit unerachtet,
ein Resultat herauskommt, das nicht nur ziemlich
und so nahe, daß der Unterschied außer acht gelassen werden könnte,
sondern vollkommen genau ist.

In der Operation selbst aber, die dem Resultate vorhergeht,
kann die Vorstellung nicht entbehrt werden,

daß einiges nicht gleich Null,
aber so unbeträchtlich sei, um außer acht gelassen werden zu können.

Allein bei ((281)) dem,
was unter mathematischer Bestimmtheit zu verstehen ist,
fällt aller Unterschied einer größeren
oder geringeren Genauigkeit gänzlich hinweg,
wie in der Philosophie nicht von größerer oder geringerer Wahrscheinlichkeit,
sondern von der Wahrheit allein die Rede sein kann.

Wenn die Methode und der Gebrauch des Unendlichen
durch den Erfolg gerechtfertigt wird, so ist es nicht so überflüssig,
dessenungeachtet die Rechtfertigung derselben zu fordern,
als es bei der Nase überflüssig scheint,
nach dem Erweise des Rechts, sich ihrer zu bedienen, zu fragen.

Denn es ist bei der mathematischen als einer wissenschaftlichen Erkenntnis
wesentlich um den Beweis zu tun,
und auch in Ansehung der Resultate ist es der Fall,
daß die streng mathematische Methode
nicht zu allen den Beleg des Erfolgs liefert,
der aber ohnehin nur ein äußerlicher Beleg ist.

Es ist der Mühe wert, den mathematischen Begriff des Unendlichen
und die merkwürdigsten Versuche näher zu betrachten,
welche die Absicht haben, den Gebrauch desselben zu rechtfertigen
und die Schwierigkeit, von der sich die Methode gedrückt fühlt, zu beseitigen.

Die Betrachtung dieser Rechtfertigungen und Bestimmungen
des mathematischen Unendlichen,
welche ich in dieser Anmerkung weitläufiger anstellen will,
wird zugleich das beste Licht auf die Natur des wahren Begriffes selbst werfen
und zeigen, wie er ihnen vorgeschwebt und zugrunde gelegen hat.

Die gewöhnliche Bestimmung des mathematischen Unendlichen ist,
daß es eine größe sei, über welche es
- wenn sie als das Unendlichgroße - keine größere
oder - wenn sie als das Unendlichkleine bestimmt ist - kleinere mehr gebe

oder die in jenem Falle größer oder in diesem Falle kleiner sei
als jede beliebige größe.

- In dieser Definition ist freilich der wahre Begriff nicht ausgedrückt,
vielmehr nur, wie schon bemerkt,
derselbe Widerspruch, der im unendlichen Progresse ist;
aber sehen wir, was an sich darin enthalten ist.

Eine größe wird in der Mathematik definiert,
daß sie etwas sei, das vermehrt und vermindert werden könne,
- überhaupt ((282)) also eine gleichgültige Grenze.

Indem nun das Unendlichgroße oder -kleine ein solches ist,
das nicht mehr vermehrt oder vermindert werden könne,
so ist es in der Tat kein Quantum als solches mehr.

Diese Konsequenz ist notwendig und unmittelbar.

Aber die Reflexion, daß das Quantum
- und ich nenne in dieser Anmerkung
Quantum überhaupt, wie es ist, das endliche Quantum -
aufgehoben ist, ist es, welche nicht gemacht zu werden pflegt
und die für das gewöhnliche Begreifen die Schwierigkeit ausmacht,
indem das Quantum, indem es unendlich ist, als ein aufgehobenes,
als ein solches zu denken gefordert wird, das nicht ein Quantum ist
und dessen quantitative Bestimmtheit doch bleibt.

Um das anzuführen, wie Kant jene Bestimmung beurteilt °,
so findet er sie nicht übereinstimmend mit dem,
was man unter einem unendlichen Ganzen verstehe.

>Nach dem gewöhnlichen Begriffe sei eine größe unendlich,
über die keine größere
(d. i. über die darin enthaltene Menge einer gegebenen Einheit) möglich ist;
es sei aber keine Menge die größte,
weil noch immer eine oder mehrere Einheiten hinzugefügt werden können.

- Durch ein unendliches Ganzes dagegen werde nicht vorgestellt,

wie groß es sei,
mithin sei sein Begriff nicht der Begriff eines Maximums (oder Minimums),
sondern es werde dadurch nur sein Verhältnis
zu einer beliebig anzunehmenden Einheit gedacht,
in Ansehung derer dasselbe größer ist als alle Zahl.

Je nachdem diese Einheit größer oder kleiner angenommen würde,
würde das Unendliche größer oder kleiner sein;
allein die Unendlichkeit,
da sie bloß in dem Verhältnisse zu dieser gegebenen Einheit bestehe,
würde immer dieselbe bleiben,
obgleich freilich die absolute größe des Ganzen
dadurch gar nicht erkannt würde.<

Kant tadelt es, wenn unendliche Ganze als ein Maximum,
als eine vollendete Menge einer gegebenen Einheit angesehen ((283)) werden.

Das Maximum oder Minimum als solches
erscheint noch immer als ein Quantum, eine Menge.

Solche Vorstellung kann die von Kant angeführte Konsequenz nicht ablehnen,
die auf ein größeres oder kleineres Unendliches führt.

Überhaupt indem das Unendliche als Quantum vorgestellt wird,
gilt noch für dasselbe der Unterschied eines Größeren oder Kleineren.

Allein diese Kritik
trifft nicht den Begriff des wahrhaften mathematischen Unendlichen,
der unendlichen Differenz, denn diese ist kein endliches Quantum mehr.

Kants Begriff der Unendlichkeit dagegen,
den er den wahren transzendentalen nennt, ist,
»daß die sukzessive Synthesis der Einheit
in Durchmessung eines Quantums niemals vollendet sein kann«.

Es ist ein Quantum überhaupt als gegeben vorausgesetzt;
dies solle durch das Synthesieren der Einheit zu einer Anzahl,
einem bestimmt anzugebenden Quantum gemacht werden,

aber dies Synthesieren niemals vollendet werden können.

Hiermit ist, wie erhellt, nichts als der Progreß ins Unendliche ausgesprochen,
nur transzendental, d. i. eigentlich subjektiv und psychologisch vorgestellt.

An sich soll zwar das Quantum vollendet sein,
aber transzendentalerweise, nämlich im Subjekte,
welches ihm ein Verhältnis zu einer Einheit gibt,
entstehe nur eine solche Bestimmung des Quantums,
die unvollendet und schlechthin mit einem Jenseits behaftet sei.

Es wird also hier überhaupt
beim Widerspruche, den die größe enthält, stehengeblieben,
aber verteilt an das Objekt und das Subjekt,
so daß jenem die Begrenztheit,
diesem aber das Hinausgehen über jede von ihm aufgefaßte Bestimmtheit
in das schlechte Unendliche zukommt.

Es ist dagegen vorhin gesagt worden,
daß die Bestimmung des mathematischen Unendlichen,
und zwar wie es in der höheren Analysis gebraucht wird,
dem Begriffe des wahrhaften Unendlichen entspricht;
die Zusammenstellung beider Bestimmungen
soll nun in ausführlicher Entwicklung vorgenommen werden.

- Was zuerst das wahrhafte unendliche ((284)) Quantum betrifft,
so bestimmte es sich als an ihm selbst unendlich;
es ist dies, indem, wie sich ergeben hat,
das endliche Quantum oder das Quantum überhaupt
und sein Jenseits, das schlechte Unendliche,
auf gleiche Weise aufgehoben sind.

Das aufgehobene Quantum ist damit
in die Einfachheit und in die Beziehung auf sich selbst zurückgegangen,
aber nicht nur wie das extensive, indem es in intensives Quantum überging,
das seine Bestimmtheit nur an sich an einer äußeren Vielfachheit hat,
gegen die es jedoch gleichgültig und wovon es verschieden sein soll.

Das unendliche Quantum enthält vielmehr
erstens die Äußerlichkeit und zweitens die Negation derselben an ihm selbst;
so ist es nicht mehr irgendein endliches Quantum,
nicht eine Größenbestimmtheit, die ein Dasein als Quantum hätte,
sondern es ist einfach und daher nur als Moment;
es ist eine Größenbestimmtheit in qualitativer Form;
seine Unendlichkeit ist, als eine qualitative Bestimmtheit zu sein.

- So als Moment ist es in wesentlicher Einheit mit seinem Anderen,
nur als bestimmt durch dieses sein Anderes,
d. i. es hat nur Bedeutung in Beziehung
auf ein im Verhältnis mit ihm Stehendes.

außer diesem Verhältnisse ist es Null,
- da gerade das Quantum als solches gegen das Verhältnis gleichgültig,
in ihm doch eine unmittelbare ruhende Bestimmung sein soll.

In dem Verhältnisse als nur Moment ist es nicht ein für sich Gleichgültiges;
es ist, in der Unendlichkeit als Fürsichsein,
indem es zugleich eine quantitative Bestimmtheit ist,
nur als ein Für-Eines.

Der Begriff des Unendlichen, wie er sich hier abstrakt exponiert hat,
wird sich zeigen, dem mathematischen Unendlichen zugrunde [zu] liegen,
und er selbst wird deutlicher werden,
indem wir die verschiedenen Stufen des Ausdrucks des Quantums
als eines Verhältnismoments betrachten,
von der untersten an, wo es noch zugleich Quantum als solches ist,
bis zu der höheren, wo es die Bedeutung und den Ausdruck
eigentlicher unendlicher größe erhält.

Nehmen wir also zuerst das Quantum in dem Verhältnisse,
wie es eine gebrochene Zahl ist.

Solcher Bruch, 2/7 z. B., ist ((285)) nicht ein Quantum wie 1, 2, 3 usf.,
zwar eine gewöhnliche endliche Zahl,
jedoch nicht eine unmittelbare, wie die ganzen Zahlen,
sondern als Bruch mittelbar bestimmt durch zwei andere Zahlen,

die Anzahl und Einheit gegeneinander sind,
wobei auch die Einheit eine bestimmte Anzahl ist.

Aber von dieser näheren Bestimmung derselben gegeneinander abstrahiert
und sie bloß nach dem, was ihnen in der qualitativen Beziehung,
in der sie hier sind, als Quantis widerfährt, betrachtet,
so sind 2 und 7 sonst gleichgültige Quanta;
indem sie aber hier nur als Momente, eines des anderen,
und damit eines Dritten (des Quantums, das der Exponent heißt) auftreten,
so gelten sie sogleich nicht als 2 und 7,
sondern nur nach ihrer Bestimmtheit gegeneinander.

Statt ihrer kann darum ebensogut 4 und 14 oder 6 und 21 usf.
ins Unendliche gesetzt werden.

Hiermit fangen sie also an, einen qualitativen Charakter zu haben.

Gälten sie als bloße Quanta,
so ist [bei] 2 und 7 schlechthin das eine nur 2, das andere nur 7;
4 und 14, 6 und 21 usf. sind schlechthin etwas anderes
als jene Zahlen und können, insofern sie nur unmittelbare Quanta wären,
die einen nicht an die Stelle der anderen gesetzt werden.

Insofern aber 2 und 7 nicht nach der Bestimmtheit,
solche Quanta zu sein, gelten, so ist ihre gleichgültige Grenze aufgehoben;
sie haben somit, nach dieser Seite, das Moment der Unendlichkeit an ihnen,
indem sie nicht bloß eben nicht mehr sie sind,
sondern ihre quantitative Bestimmtheit,
aber als eine an sich seiende qualitative
- nämlich nach dem, was sie im Verhältnisse gelten -, bleibt.

Es können unendlich viele andere an ihre Stelle gesetzt werden,
so daß der Wert des Bruches durch die Bestimmtheit,
welche das Verhältnis hat, sich nicht ändert.

Die Darstellung, welche die Unendlichkeit an einem Zahlenbruche hat,
ist aber darum noch unvollkommen,
weil die beiden Seiten des Bruchs, 2 und 7,
aus dem Verhältnisse genommen werden können

und gewöhnliche gleichgültige Quanta sind;
die Beziehung derselben, im Verhältnisse und Momente zu sein,
ist ihnen etwas Äußerliches und Gleichgültiges. ((286))

Ebenso ist ihre Beziehung selbst ein gewöhnliches Quantum,
der Exponent des Verhältnisses.

Die Buchstaben, mit denen in der allgemeinen Arithmetik operiert wird,
die nächste Allgemeinheit, in welche die Zahlen erhoben werden,
haben die Eigenschaft nicht, daß sie von einem bestimmten Zahlenwert sind;
sie sind nur allgemeine Zeichen
und unbestimmte Möglichkeiten jedes bestimmten Wertes.

Der Bruch a/b
scheint daher ein passenderer Ausdruck des Unendlichen zu sein,
weil a und b, aus ihrer Beziehung aufeinander genommen, unbestimmt bleiben
und auch getrennt keinen besonderen eigentümlichen Wert haben.

- Allein diese Buchstaben sind zwar als unbestimmte Größen gesetzt;
ihr Sinn aber ist, daß sie irgendein endliches Quantum seien.

Da sie also zwar die allgemeine Vorstellung,
aber nur von der bestimmten Zahl sind,
so ist es ihnen ebenfalls gleichgültig, im Verhältnisse zu sein,
und außer demselben behalten sie diesen Wert.

Betrachten wir noch näher, was im Verhältnisse vorhanden ist,
so hat es die beiden Bestimmungen an ihm, erstlich ein Quantum zu sein;
dieses aber ist zweitens nicht als ein unmittelbares,
sondern das den qualitativen Gegensatz an ihm hat;
es bleibt in demselben zugleich
jenes bestimmte, gleichgültige Quantum dadurch,
daß es aus seinem Anderssein, dem Gegensatze, in sich zurückgekehrt,
somit auch ein Unendliches ist.

Diese beiden Bestimmungen stellen sich in der folgenden bekannten Form
in ihrem Unterschiede voneinander entwickelt dar.

Der Bruch 2/7 kann ausgedrückt werden als 0,285714..,
1/1-a als 1 + a + a2 + a3 usf.

So ist er als eine unendliche Reihe;
der Bruch selbst heißt die Summe oder der endliche Ausdruck derselben.

Vergleichen wir die beiden Ausdrücke,
so stellt der eine, die unendliche Reihe, ihn nicht mehr als Verhältnis,
sondern nach der Seite dar, daß er ein Quantum ist als eine Menge
von solchen, die zueinander hinzukommen, als eine Anzahl.

- Daß die Größen, die ihn als Anzahl ausmachen sollen,
wieder aus Dezimalbrüchen, also selbst ((287)) aus Verhältnissen bestehen,
darauf kommt es hier nicht an;
denn dieser Umstand betrifft die besondere Art der Einheit dieser Größen,
nicht sie, insofern sie die Anzahl konstituieren;
wie auch eine aus mehreren Ziffern bestehende
ganze Zahl des Dezimalsystems
wesentlich als eine Anzahl gilt und nicht darauf gesehen wird,
daß sie aus Produkten einer Zahl
und der Zahl Zehn und deren Potenzen besteht.

So wie es hier auch nicht darauf ankommt,
daß es andere Brüche gibt als der z. B. genommene 2/7,
die, zu Dezimalbrüchen gemacht, nicht eine unendliche Reihe geben;
jeder aber kann für ein Zahlensystem von anderer Einheit als eine solche
ausgedrückt werden.

Indem nun in der unendlichen Reihe,
die den Bruch als Anzahl darstellen soll,
die Seite, daß er Verhältnis ist, verschwindet,
so verschwindet auch die Seite, nach welcher er, wie vorhin gezeigt,
die Unendlichkeit an ihm hatte.

Diese aber ist auf eine andere Weise hereingekommen;
die Reihe ist nämlich selbst unendlich.

Von welcher Art nun die Unendlichkeit der Reihe sei, erhellt von selbst;

es ist die schlechte Unendlichkeit des Progresses.

Die Reihe enthält und stellt den Widerspruch dar,
etwas, das ein Verhältnis ist und qualitative Natur in ihm hat,
als ein Verhältnisloses, als ein bloßes Quantum, als Anzahl darzustellen.

Die Folge davon ist,
daß an der Anzahl, die in der Reihe ausgedrückt ist, immer etwas fehlt,
so daß über das, was gesetzt ist, immer hinausgegangen werden muss,
um die geforderte Bestimmtheit zu erreichen.

Das Gesetz des Fortgangs ist bekannt;
es liegt in der Bestimmung des Quantums, die im Bruche enthalten ist,
und in der Natur der Form, in der sie ausgedrückt werden soll.

Die Anzahl kann wohl durch Fortsetzung der Reihe
so genau gemacht werden, als man nötig hat;
aber immer bleibt die Darstellung durch sie nur ein Sollen;
sie ist mit einem Jenseits behaftet, das nicht aufgehoben werden kann,
weil ein auf qualitativer Bestimmtheit Beruhendes als Anzahl auszudrücken
der bleibende Widerspruch ist. ((288))

In dieser unendlichen Reihe ist jene Ungenauigkeit wirklich vorhanden,
von der am wahrhaften mathematischen Unendlichen nur der Schein vorkommt.

Diese beiden Arten des mathematischen Unendlichen
sind sowenig zu verwechseln als die beiden Arten des philosophischen Unendlichen.

Bei der Darstellung des wahrhaften mathematischen Unendlichen
ist anfangs die Form der Reihe gebraucht
oder auch neuerlich wieder hervorgerufen worden.

Aber sie ist für dasselbe nicht notwendig;
im Gegenteil ist das Unendliche der unendlichen Reihe
wesentlich von jenem unterschieden, wie die Folge zeigen soll.

Diese vielmehr steht sogar dem Ausdrucke des Bruches nach.

Die unendliche Reihe enthält nämlich die schlechte Unendlichkeit,
weil das, was die Reihe ausdrücken soll, ein Sollen bleibt,
und was sie ausdrückt, mit einem Jenseits, das nicht verschwindet,
behaftet und verschieden von dem ist, was ausgedrückt werden soll.

Sie ist unendlich nicht um der Glieder willen, die gesetzt sind,
sondern darum, weil sie unvollständig sind,
weil das Andere, das zu ihnen wesentlich gehört, jenseits ihrer ist;
was in ihr da ist, der gesetzten Glieder mögen so viele sein als wollen,
ist nur ein Endliches im eigentlichen Sinne, gesetzt als Endliches,
d. i. als solches, das nicht ist, was es sein soll.

Dagegen ist aber das, was der endliche Ausdruck
oder die Summe solcher Reihe genannt wird, ohne Mangel;
er enthält den Wert, den die Reihe nur sucht, vollständig;
das Jenseits ist aus der Flucht zurückgerufen;
was er ist und was er sein soll, ist nicht getrennt, sondern ist dasselbe.

Das beide Unterscheidende liegt näher sogleich darin,
daß in der unendlichen Reihe das Negative außerhalb ihrer Glieder ist,
welche Gegenwart haben, indem sie nur als Teile der Anzahl gelten.

In dem endlichen Ausdrucke dagegen, der ein Verhältnis ist,
ist das Negative immanent
als das Bestimmtsein der Seiten des Verhältnisses durch einander,
welches ein in sich Zurückgekehrtsein,
sich auf sich beziehende Einheit, als Negation der Negation
(beide Seiten des Verhältnisses ((289)) sind nur als Momente) ist,
hiermit die Bestimmung der Unendlichkeit in sich hat.

- In der Tat ist also die gewöhnlich so genannte Summe,
das 2/7 oder 1/1-a , ein Verhältnis;
und dieser sogenannte endliche Ausdruck
ist der wahrhaft unendliche Ausdruck.

Die unendliche Reihe dagegen ist in Wahrheit Summe;
ihr Zweck ist, das, was an sich Verhältnis ist,
in der Form einer Summe darzustellen,
und die vorhandenen Glieder der Reihe

sind nicht als Glieder eines Verhältnisses,
sondern eines Aggregats.

Sie ist ferner vielmehr der endliche Ausdruck;
denn sie ist das unvollkommene Aggregat
und bleibt wesentlich ein Mangelhaftes.

Sie ist nach dem, was in ihr da ist, ein bestimmtes Quantum,
zugleich aber ein geringeres, als sie sein soll;
alsdann auch das, was ihr fehlt, ist ein bestimmtes Quantum;
dieser fehlende Teil ist in der Tat das, was das Unendliche an der Reihe heißt,
nach der nur formellen Seite, daß er ein Fehlendes, ein Nichtsein ist;
nach seinem Inhalte ist er ein endliches Quantum.

Das, was in der Reihe da ist, zusammen mit dem, was ihr fehlt,
macht erst das aus, was der Bruch ist,
das bestimmte Quantum, das sie gleichfalls sein soll, aber zu sein nicht vermag.

- Das Wort »unendlich« pflegt, auch in der unendlichen Reihe,
in der Meinung etwas Hohes und Hehres zu sein;
es ist dies eine Art von Aberglauben, der Aberglaube des Verstandes;
man hat gesehen, wie es sich vielmehr
auf die Bestimmung der Mangelhaftigkeit reduziert.

Daß es, kann noch bemerkt werden, unendliche Reihen gibt,
die nicht summierbar sind,
ist in bezug auf die Form von Reihe überhaupt
ein äußerlicher und zufälliger Umstand.

Sie enthalten eine höhere Art der Unendlichkeit als die summierbaren,
nämlich eine Inkommensurabilität
oder die Unmöglichkeit, das darin enthaltene quantitative Verhältnis
als ein Quantum, sei es auch als Bruch, darzustellen;
die Form der Reihe aber als solche, die sie haben,
enthält dieselbe Bestimmung der schlechten Unendlichkeit,
welche in der summierbaren Reihe ist.

Die soeben am Bruche und an seiner Reihe bemerkte Verkehrung ((290))

in Ansehung des Ausdrucks findet auch statt,
insofern das mathematische Unendliche
- nämlich nicht das soeben genannte, sondern das wahrhafte -
das relative Unendliche,
das gewöhnliche metaphysische dagegen,
worunter das abstrakte, schlechte Unendliche verstanden wird,
das absolute genannt worden ist.

In der Tat ist vielmehr dieses metaphysische nur das relative,
weil die Negation, die es ausdrückt,
nur so im Gegensatze einer Grenze ist,
daß diese außer ihm bestehen bleibt und von ihm nicht aufgehoben wird;
das mathematische Unendliche hingegen
hat die endliche Grenze wahrhaft in sich aufgehoben,
weil das Jenseits derselben mit ihr vereinigt ist.

In dem Sinne, in welchem aufgezeigt worden,
daß die sogenannte Summe
oder der endliche Ausdruck einer unendlichen Reihe
vielmehr als der unendliche anzusehen ist,
ist es vornehmlich, daß Spinoza den Begriff der wahren Unendlichkeit
gegen den der schlechten aufstellt und durch Beispiele erläutert.

Sein Begriff gewinnt am meisten Licht,
indem ich das, was er darüber sagt, an diese Entwicklung anschließe.

Er definiert zunächst das Unendliche
als die absolute Affirmation der Existenz irgendeiner Natur,
das Endliche im Gegenteil als Bestimmtheit, als Verneinung.

Die absolute Affirmation einer Existenz
ist nämlich als ihre Beziehung auf sich selbst zu nehmen,
nicht dadurch zu sein, daß ein Anderes ist;
das Endliche hingegen ist die Verneinung,
ein Aufhören als Beziehung auf ein Anderes, das außer ihm anfängt.

Die absolute Affirmation einer Existenz
erschöpft nun zwar den Begriff der Unendlichkeit nicht;

dieser enthält, daß die Unendlichkeit Affirmation ist,
nicht als unmittelbare, sondern nur als wiederhergestellte
durch die Reflexion des Anderen in sich selbst
oder als Negation des Negativen.

Aber bei Spinoza hat die Substanz und deren absolute Einheit
die Form von unbewegter, d. i. nicht sich mit sich selbst vermittelnder Einheit,
von einer Starrheit,
worin der Begriff der negativen Einheit des Selbst, die Subjektivität,
sich noch nicht findet. ((191))

Das mathematische Beispiel,
womit er das wahre Unendliche erläutert (Epist. XII),
ist ein Raum zwischen zwei ungleichen Kreisen,
deren einer innerhalb des anderen, ohne ihn zu berühren, fällt
und die nicht konzentrisch sind.

Er machte, wie es scheint, sich viel aus dieser Figur
und dem Begriff, als deren [? dessen] Beispiel er sie gebrauchte,
daß er sie zum Motto seiner Ethik machte.

- »Die Mathematiker«, sagt er, »schließen,
daß die Ungleichheiten, die in einem solchen Raume möglich sind,
unendlich sind,
nicht aus der unendlichen Menge der Teile,
    denn seine größe ist bestimmt und begrenzt,
    und ich kann größere und kleinere solche Räume setzen,
sondern weil die Natur der Sache jede Bestimmtheit übertrifft.«

- Man sieht, Spinoza verwirft jene Vorstellung vom Unendlichen,
nach welcher es als Menge oder als Reihe vorgestellt wird,
die nicht vollendet ist,
und erinnert, daß hier an dem Raume des Beispiels
das Unendliche nicht jenseits, sondern gegenwärtig und vollständig ist;
dieser Raum ist ein Begrenztes, aber darum ein Unendliches,
»weil die Natur der Sache jede Bestimmtheit übersteigt«,
weil die darin enthaltene Größenbestimmung
zugleich nicht als ein Quantum darstellbar ist
oder nach obigem Kantischen Ausdruck

das Synthesieren nicht zu einem - diskreten - Quantum
vollendet werden kann.

- Wie überhaupt der Gegensatz von kontinuierlichem und diskretem Quantum
auf das Unendliche führt,
soll in einer späteren Anmerkung auseinandergesetzt werden.

- Jenes Unendliche einer Reihe nennt Spinoza das Unendliche der Imagination;
das Unendliche hingegen als Beziehung auf sich selbst
das Unendliche des Denkens oder infinitum actu.

Es ist nämlich actu, es ist wirklich unendlich,
weil es in sich vollendet und gegenwärtig ist.

So ist die Reihe o,285714.. oder 1 + a + a2 + a3..
das Unendliche bloß der Einbildung oder des Meinens;
denn es hat keine Wirklichkeit, es fehlt ihm schlechthin etwas;
hingegen 2/7 oder 1/1-a ist das wirklich,
nicht nur was die Reihe in ihren vorhandenen Gliedern ist,
sondern noch das dazu, was ihr mangelt, was sie nur sein soll.

Das 2/7 oder ((292)) 1/1-a ist gleichfalls eine endliche größe,
wie der zwischen den zwei Kreisen eingeschlossene Raum Spinozas
und dessen Ungleichheiten,
und kann wie dieser Raum größer oder kleiner gemacht werden.

Aber es kommt damit nicht die Ungereimtheit
eines größeren oder kleineren Unendlichen heraus;
denn dies Quantum des Ganzen geht das Verhältnis seiner Momente,
die Natur der Sache, d. h. die qualitative Größenbestimmung nichts an;
das, was in der unendlichen Reihe da ist,
ist ebenso ein endliches Quantum, aber außerdem noch ein Mangelhaftes.

- Die Einbildung dagegen bleibt beim Quantum als solchem stehen
und reflektiert nicht auf die qualitative Beziehung,
welche den Grund der vorhandenen Inkommensurabilität ausmacht.

Die Inkommensurabilität, welche in dem Beispiel Spinozas liegt,
schließt überhaupt die Funktionen krummer Linien in sich

und führt näher auf das Unendliche,
das die Mathematik bei solchen Funktionen,
überhaupt bei den Funktionen veränderlicher Größen eingeführt hat
und welches das wahrhafte mathematische, quantitative Unendliche ist,
das auch Spinoza sich dachte.

Diese Bestimmung soll nun hier näher erörtert werden.

Was fürs erste die so wichtig geltende Kategorie der Veränderlichkeit betrifft,
unter welche die in jenen Funktionen bezogenen Größen gefaßt werden,
so sollen sie zunächst veränderlich nicht in dem Sinne sein,
wie im Bruche 2/7 die beiden Zahlen 2 und 7,
indem ebensosehr 4 und 14, 6 und 21 und so fort ins Unendliche
andere Zahlen an ihre Stelle gesetzt werden können,
ohne den im Bruche gesetzten Wert zu ändern.

So kann noch mehr in a/b
an die Stelle von a und b jede beliebige Zahl gesetzt werden,
ohne das zu ändern, was a/b ausdrücken soll.

In dem Sinne nun, daß auch an die Stelle von x und y einer Funktion
eine unendliche, d. h. unerschöpfliche Menge von Zahlen
gesetzt werden könne,
sind a und b so sehr veränderliche größe als jene, x und y. ((293))

Der Ausdruck veränderliche Größen ist darum sehr vage
und unglücklich gewählt für Größenbestimmungen,
die ihr Interesse und Behandlungsart in etwas ganz anderem liegen haben
als in ihrer bloßen Veränderlichkeit.

Um es deutlich zu machen,
worin die wahrhafte Bestimmung der Momente einer Funktion liegt,
mit denen sich das Interesse der höheren Analysis beschäftigt,
müssen wir die bemerklich gemachten Stufen noch einmal durchlaufen.

In 2/7 oder a/b sind 2 und 7 jedes für sich bestimmte Quanta,
und die Beziehung ist ihnen nicht wesentlich;
a und b sollen gleichfalls solche Quanta vorstellen,

die auch außer dem Verhältnisse bleiben, was sie sind.

Ferner ist auch 2/7 und a/b ein fixes Quantum, ein Quotient;
das Verhältnis macht eine Anzahl aus, deren Einheit der Nenner,
und die Anzahl dieser Einheiten der Zähler
- oder umgekehrt ausgedrückt, wenn auch 4 und 14 usf.
an die Stelle von 2 und 7 treten,
bleibt das Verhältnis auch als Quantum dasselbe.

Dies verändert sich nun aber wesentlich in der Funktion $y^2/x = p$ z. B.;
hier haben x und y zwar den Sinn, bestimmte Quanta sein zu können;
aber nicht x und y, sondern nur x und y^2 haben einen bestimmten Quotienten.

Dadurch sind diese Seiten des Verhältnisses, x und y,
erstens nicht nur keine bestimmten Quanta,
sondern zweitens ihr Verhältnis ist nicht ein fixes Quantum
(noch ist dabei ein solches wie bei a und b gemeint),
nicht ein fester Quotient,
sondern er ist als Quantum schlechthin veränderlich.

Dies aber ist allein darin enthalten, daß x nicht zu y ein Verhältnis hat,
sondern zum Quadrate von y.

Das Verhältnis einer größe zur Potenz ist nicht ein Quantum,
sondern wesentlich qualitatives Verhältnis;
das Potenzenverhältnis ist der Umstand,
der als Grundbestimmung anzusehen ist.

- In der Funktion der geraden Linie $y = ax$ aber
ist $x/y = a$ ein gewöhnlicher Bruch und Quotient;
diese Funktion ist daher nur formell eine Funktion von veränderlichen Größen,
oder x und y sind hier, was a und b in a/b,
sie sind nicht in derjenigen Bestimmung,
in welcher die Differential- und Integralrechnung sie betrachtet. ((294))

- Wegen der besonderen Natur
der veränderlichen Größen in dieser Betrachtungsweise
wäre es zweckmäßig gewesen,
für sie sowohl einen besonderen Namen
als andere Bezeichnungen einzuführen

als die gewöhnlichen der unbekannten Größen
in jeder endlichen bestimmten oder unbestimmten Gleichung;
um ihrer wesentlichen Verschiedenheit willen
von solchen bloß unbekannten Größen,
die an sich vollkommen bestimmte Quanta
oder ein bestimmter Umfang von bestimmten Quantis sind.

- Es ist auch nur der Mangel des Bewußtseins
über die Eigentümlichkeit dessen,
was das Interesse der höheren Analysis ausmacht
und das Bedürfnis und die Erfindung des Differentialkalküls
herbeigeführt hat,
daß Funktionen des ersten Grades wie die Gleichung der geraden Linie
in die Behandlung dieses Kalküls für sich mit hereingenommen werden;
seinen Anteil an solchem Formalismus hat ferner der Mißverstand,
der die an sich richtige Forderung der Verallgemeinerung einer Methode
dadurch zu erfüllen meint,
daß die spezifische Bestimmtheit, auf die sich das Bedürfnis gründet,
weggelassen wird,
so daß es dafür gilt, als ob es sich in diesem Felde
nur um veränderliche Größen überhaupt handle.

Es wäre wohl viel Formalismus in den Betrachtungen dieser Gegenstände
wie in der Behandlung erspart worden,
wenn man eingesehen hätte,
daß derselbe nicht veränderliche Größen als solche,
sondern Potenzenbestimmungen betreffe.

Aber es ist noch eine weitere Stufe,
auf der das mathematische Unendliche in seiner Eigentümlichkeit hervortritt.

In einer Gleichung, worin x und y zunächst
als durch ein Potenzenverhältnis bestimmt, gesetzt sind,
sollen x und y als solche noch Quanta bedeuten;
diese Bedeutung nun geht vollends
in den sogenannten unendlich kleinen Differenzen gänzlich verloren.

dx, dy sind keine Quanta mehr, noch sollen sie solche bedeuten,
sondern haben allein in ihrer Beziehung eine Bedeutung,

einen Sinn bloß als Momente.

Sie sind nicht mehr Etwas, das Etwas als Quantum genommen,
nicht endliche Differenzen;
aber auch nicht Nichts, ((295)) nicht die bestimmungslose Null.

außer ihrem Verhältnisse sind sie reine Nullen,
aber sie sollen nur als Momente des Verhältnisses,
als Bestimmungen des Differentialkoeffizienten dx/dy genommen werden.

In diesem Begriff des Unendlichen
ist das Quantum wahrhaft zu einem qualitativen Dasein vollendet;
es ist als wirklich unendlich gesetzt;
es ist nicht nur als dieses oder jenes Quantum aufgehoben,
sondern als Quantum überhaupt.

Es bleibt aber die Quantitätsbestimmtheit als Element von Quantis Prinzip
oder sie, wie man auch gesagt hat, in ihrem ersten Begriffe.

Gegen diesen Begriff ist aller Angriff gerichtet,
der auf die Grundbestimmung der Mathematik dieses Unendlichen,
der Differential- und Integralrechnung, gemacht worden ist.

Unrichtige Vorstellungen der Mathematiker selbst veranlaßten es,
wenn er nicht anerkannt worden ist;
vornehmlich aber ist die Unvermögendheit,
den Gegenstand als Begriff zu rechtfertigen,
schuld an diesen Anfechtungen.

Den Begriff kann aber die Mathematik, wie oben erinnert worden,
hier nicht umgehen;
denn als Mathematik des Unendlichen
schränkt sie sich nicht auf die endliche Bestimmtheit ihrer Gegenstände ein
- wie in der reinen Mathematik
der Raum und die Zahl und deren Bestimmungen
nur nach ihrer Endlichkeit betrachtet und aufeinander bezogen werden -,
sondern sie versetzt eine von daher aufgenommene
und von ihr behandelte Bestimmung

in Identität mit ihrer entgegengesetzten,
wie sie z. B. eine krumme Linie zu einer geraden,
den Kreis zu einem Polygon usf. macht.

Die Operationen, die sie sich als Differential- und Integralrechnung erlaubt,
sind daher der Natur bloß endlicher Bestimmungen
und deren Beziehungen gänzlich widersprechend
und hätten darum ihre Rechtfertigung allein in dem Begriff.

Wenn die Mathematik des Unendlichen daran festhielt,
daß jene Quantitätsbestimmungen verschwindende Größen,
d. h. solche [seien], die nicht mehr irgendein Quantum,
aber auch nicht nichts,
sondern noch eine Bestimmtheit gegen ((296)) Anderes sind,
so schien nichts klarer,
als daß es keinen solchen Mittelzustand wie man es nannte,
zwischen Sein und Nichts gebe.

- Was es mit diesem Einwurfe und sogenannten Mittelzustande auf sich habe,
ist oben bereits bei der Kategorie des Werdens, Anm. 4 [S. 109 ff.] gezeigt.

Allerdings ist die Einheit des Seins und Nichts kein Zustand;
ein Zustand wäre eine Bestimmung des Seins und Nichts,
worein diese Momente nur etwa zufälligerweise
gleichsam als in eine Krankheit oder äußerliche Affektion
durch ein irrtümliches Denken geraten sollten;
sondern diese Mitte und Einheit, das Verschwinden
oder ebenso das Werden ist vielmehr allein ihre Wahrheit.

Was unendlich sei, ist ferner gesagt worden,
sei nicht vergleichbar als ein Größeres oder Kleineres;
es könne daher nicht ein Verhältnis von Unendlichen zu Unendlichen,
noch Ordnungen oder Dignitäten des Unendlichen geben,
als welche Unterschiede der unendlichen Differenzen
in der Wissenschaft derselben vorkommen.

- Es liegt bei diesem schon erwähnten Einwurfe
immer die Vorstellung zugrunde,

daß hier von Quantis die Rede sein solle, die als Quanta verglichen werden;
daß Bestimmungen, die keine Quanta mehr sind,
kein Verhältnis mehr zueinander haben.

Vielmehr ist aber das, was nur im Verhältnis ist, kein Quantum;
das Quantum ist eine solche Bestimmung,
die außer ihrem Verhältnis ein vollkommen gleichgültiges Dasein haben,
der ihr Unterschied von einem Anderen gleichgültig sein soll,
dahingegen das qualitative nur das ist,
was es in seinem Unterschiede von einem Anderen ist.

Jene unendlichen Größen sind daher nicht nur vergleichbar,
sondern sind nur als Momente der Vergleichung, des Verhältnisses.

Ich führe die wichtigsten Bestimmungen an,
welche in der Mathematik über dies Unendliche gegeben worden sind;
es wird daraus erhellen, daß denselben der Gedanke der Sache,
übereinstimmend mit dem hier entwickelten Begriffe, zugrunde liegt,
daß ihre Urheber ihn aber als Begriff nicht ergründeten
und bei der Anwendung wieder Auskunftsmittel ((297)) nötig hatten,
welche ihrer besseren Sache widersprechen.

Der Gedanke kann nicht richtiger bestimmt werden,
als Newton ihn gegeben hat.

Ich trenne dabei die Bestimmungen ab,
die der Vorstellung der Bewegung und der Geschwindigkeit angehören
(von welcher er vornehmlich den Namen Fluxionen nahm),
weil der Gedanke hierin nicht in der gehörigen Abstraktion,
sondern konkret, vermischt mit außerwesentlichen Formen erscheint.

Diese Fluxionen erklärt Newton
(Philosophiae naturalis principia mathematica, L. 1, Lemma XI, Schol.)
dahin, daß er nicht Unteilbare
- eine Form, deren sich frühere Mathematiker,
Gavalieri ° und andere, bedienten
und welche den Begriff eines an sich bestimmten Quantums enthält -
verstehe, sondern verschwindende Teilbare.

Ferner nicht Summen und Verhältnisse bestimmter Teile,
sondern die Grenzen (limites) der Summen und Verhältnisse.

Es werde die Einwendung gemacht,
daß verschwindende Größen kein letztes Verhältnis haben,
weil es, ehe sie verschwunden, nicht das letzte,
und wenn sie verschwunden, keines mehr ist.

Aber unter dem Verhältnisse verschwindender Größen
sei das Verhältnis zu verstehen,
nicht ehe sie verschwinden und nicht nachher,
sondern mit dem sie verschwinden (quacum evanescunt).

Ebenso ist das erste Verhältnis werdender Größen das, mit dem sie werden.

Nach dem damaligen Stande der wissenschaftlichen Methode
wurde nur erklärt, was unter einem Ausdrucke zu verstehen sei;
daß aber dies oder jenes darunter zu verstehen sei,
ist eigentlich eine subjektive Zumutung oder auch eine historische Forderung,
wobei nicht gezeigt wird, daß ein solcher Begriff
an und für sich notwendig ist und innere Wahrheit hat.

Allein das Angeführte zeigt, daß der von Newton aufgestellte Begriff
dem entspricht, wie die unendliche größe sich in der obigen Darstellung
aus der Reflexion des Quantums ((298)) in sich ergab.

Es sind Größen verstanden in ihrem Verschwinden,
d. h. die nicht mehr Quanta sind;
ferner nicht Verhältnisse bestimmter Teile,
sondern die Grenzen des Verhältnisses.

Es sollen also sowohl die Quanta für sich, die Seiten des Verhältnisses,
als damit auch das Verhältnis, insofern es ein Quantum wäre, verschwinden;
die Grenze des Größenverhältnisses ist, worin es ist und nicht ist;
dies heißt genauer, worin das Quantum verschwunden
und damit das Verhältnis nur als qualitatives Quantitätsverhältnis
und die Seiten desselben ebenso als qualitative Quantitätsmomente
erhalten sind.

- Newton fügt hinzu, daß daraus,
daß es letzte Verhältnisse der verschwindenden Größen gebe,
nicht zu schließen sei, daß es letzte Größen, Unteilbare, gebe.

Dies wäre nämlich wieder ein Absprung von dem abstrakten Verhältnisse
auf solche Seiten desselben, welche für sich außer ihrer Beziehung
einen Wert haben sollten als Unteilbare,
als etwas, das ein Eins, ein Verhältnisloses sein würde.

Gegen jenen Mißverstand erinnert er noch, daß die letzten Verhältnisse
nicht Verhältnisse letzter Größen seien,
sondern Grenzen, denen die Verhältnisse
der ohne Grenze abnehmenden Größen näher sind
als jeder gegebene, d. h. endliche Unterschied,
welche Grenze sie aber nicht überschreiten, so daß sie Nichts würden.

- Unter letzten Größen hätten nämlich, wie gesagt,
Unteilbare oder Eins verstanden werden können.

In der Bestimmung des letzten Verhältnisses aber
ist sowohl die Vorstellung des gleichgültigen Eins, des verhältnislosen,
als auch des endlichen Quantums entfernt.

Es bedürfte aber weder des Abnehmens ohne Grenze,
in das Newton das Quantum versetzt
und das nur den Progreß ins Unendliche ausdrückt,
noch der Bestimmung der Teilbarkeit,
welche hier keine unmittelbare Bedeutung mehr hat,
wenn die geforderte Bestimmung sich zum Begriffe einer Größenbestimmung,
die rein nur Moment des Verhältnisses ist,
fortgebildet hätte.

In Rücksicht der Erhaltung des Verhältnisses im Verschwinden der Quantorum
findet sich ° ((290)) der Ausdruck,
daß vermöge des Gesetzes der Stetigkeit
die verschwindenden Größen noch das Verhältnis, aus dem sie herkommen,
ehe sie verschwinden, behalten.

- Diese Vorstellung drückt die wahre Natur der Sache aus,
insofern nicht die Stetigkeit des Quantums verstanden wird,
die es im unendlichen Progreß hat,
sich in sein Verschwinden so zu kontinuieren,
daß im Jenseits seiner wieder nur ein endliches Quantum,
ein neues Glied der Reihe entsteht;
ein stetiger Fortgang wird aber immer so vorgestellt,
daß die Werte durchlaufen werden, welche noch endliche Quanta sind.

In demjenigen Übergange dagegen,
welcher in das wahrhafte Unendliche gemacht wird,
ist das Verhältnis das stetige;
es ist so sehr stetig und sich erhaltend, daß er vielmehr allein darin besteht,
das Verhältnis rein herauszuheben
und die verhältnislose Bestimmung,
d. i. daß ein Quantum, welches Seite des Verhältnisses ist,
auch außer dieser Beziehung gesetzt noch Quantum ist,
verschwinden zu machen.

- Diese Reinigung des quantitativen Verhältnisses
ist insofern nichts anderes, als wenn ein empirisches Dasein begriffen wird.

Dies wird hierdurch so über sich selbst erhoben,
daß sein Begriff dieselben Bestimmungen enthält als es selbst,
aber in ihrer Wesentlichkeit und in die Einheit des Begriffes gefaßt,
worin sie ihr gleichgültiges, begriffloses Bestehen verloren haben.

Gleich interessant ist die andere Form der Newtonschen Darstellung
der in Rede stehenden Größen, nämlich als erzeugender Größen oder Prinzipien.

Eine erzeugte größe (genita) ist ein Produkt oder Quotient, Wurzeln,
Rechtecke, Quadrate, auch Seiten von Rechtecken, Quadraten,
- überhaupt eine endliche größe.

- >Sie als veränderlich betrachtet,
wie sie in fortdauernder Bewegung und Fließen zu- oder abnehmend ist,
so verstehe er ihre momentanen Inkremente ((300)) oder Dekremente
unter dem Namen von Momenten.

Diese sollen aber nicht für Teilchen von bestimmter größe
genommen werden (particucae finitae).

Solche seien nicht selbst Momente, sondern aus Momenten erzeugte Größen;
es seien vielmehr die werdenden Prinzipien
oder Anfänge endlicher Größen zu verstehen.<

- Das Quantum wird hier von sich selbst unterschieden,
wie es als ein Produkt oder Daseiendes,
und wie es in seinem Werden, in seinem Anfange und Prinzip,
d. h. wie es in seinem Begriffe oder, was hier dasselbe ist,
in seiner qualitativen Bestimmung ist;
in der letzteren sind die quantitativen Unterschiede,
die unendlichen Inkremente oder Dekremente, nur Momente;
erst das Gewordene ist das in die Gleichgültigkeit des Daseins
und in die Äußerlichkeit Übergegangene, das Quantum.

- Wenn aber diese in Ansehung der Inkremente oder Dekremente
angeführten Bestimmungen des Unendlichen
von der Philosophie des wahrhaften Begriffs anerkannt werden müssen,
so ist auch sogleich zu bemerken,
daß die Formen selbst von Inkrementen usf.
innerhalb der Kategorie des unmittelbaren Quantums
und des erwähnten stetigen Fortgangs fallen;
und vielmehr sind die Vorstellungen von Inkrement, Zuwachs,
Zunahme des x um dx oder i usf.
als das in den Methoden vorhandene Grundübel anzusehen,
- als das bleibende Hindernis,
aus der Vorstellung des gewöhnlichen Quantums
die Bestimmung des qualitativen Quantitätsmoments rein herauszuheben.

Gegen die angegebenen Bestimmungen
steht die Vorstellung von unendlich kleinen Größen,
die auch im Inkrement oder Dekrement selbst steckt, weit zurück.

Nach derselben sollen sie von der Beschaffenheit sein,
daß nicht nur sie gegen endliche Größen,
sondern auch deren höhere Ordnungen gegen die niedrigere

oder auch die Produkte aus mehreren gegen eine einzelne
zu vernachlässigen seien.

- Bei Leibniz hebt sich die Forderung dieser Vernachlässigung,
welche die vorhergehenden Erfinder von Methoden,
die sich auf diese größe bezogen, gleichfalls eintreten lassen,
auffallender ((301)) hervor.

Sie ist es vornehmlich, die diesem Kalkül
beim Gewinne der Bequemlichkeit
den Schein von Ungenauigkeit und ausdrücklicher Unrichtigkeit
in dem Wege seiner Operation gibt.

- Wolf hat sie in seiner Weise, die Sachen populär zu machen,
d. h. den Begriff zu verunreinigen
und unrichtige sinnliche Vorstellungen an dessen Stelle zu setzen,
verständlich zu machen gesucht.

Er vergleicht nämlich die Vernachlässigung
der unendlichen Differenzen höherer Ordnungen gegen niedrigere
mit dem Verfahren eines Geometers,
der bei der Messung der Höhe eines Berges
um nicht weniger genau gewesen sei,
wenn der Wind indes ein Sandkörnchen von der Spitze weggeweht habe,
oder mit der Vernachlässigung der Höhen der Häuser, Türme
bei der Berechnung der Mondfinsternisse °.

Wenn die Billigkeit des gemeinen Menschenverstandes
eine solche Ungenauigkeit erlaubt,
so haben dagegen alle Geometer diese Vorstellung verworfen.

Es drängt sich von selbst auf,
daß in der Wissenschaft der Mathematik
von einer solchen empirischen Genauigkeit ganz und gar nicht die Rede ist,
daß das mathematische Messen durch Operationen des Kalküls
oder durch Konstruktionen und Beweise der Geometrie
gänzlich vom Feldmessen, vom Messen empirischer Linien, Figuren usf.
unterschieden ist.

Ohnehin zeigen, wie oben angeführt,
die Analytiker durch die Vergleichung des Resultats,
wie es auf streng geometrischem Wege
und wie es nach der Methode der unendlichen Differenzen erhalten wird,
daß das eine dasselbe ist als das andere
und daß ein Mehr oder Weniger von Genauigkeit
ganz und gar nicht stattfindet.

Und es versteht sich von selbst, daß ein absolut genaues Resultat
nicht aus einem Verfahren herkommen könne, das ungenau wäre.

Jedoch kann wieder auf der andern Seite
das Verfahren selbst jener Vernachlässigung
aus dem Grunde der Unbedeutendheit,
des Protestierens gegen die angeführte Rechtfertigungsweise unerachtet,
nicht entbehren.

Und dies ist die Schwierigkeit,
um welche die Bemühungen ((302)) der Analytiker gehen,
das hierin liegende Widersinnige begreiflich zu machen und es zu entfernen.

Es ist in dieser Rücksicht vornehmlich Eulers ° Vorstellung anzuführen.

Indem er die allgemeine Newtonsche Definition zugrunde legt,
dringt er darauf, daß die Differentialrechnung
die Verhältnisse der Inkremente einer größe betrachte,
daß aber die unendliche Differenz als solche
ganz als Null zu betrachten sei.

- Wie dies zu verstehen ist, liegt im Vorhergehenden;
die unendliche Differenz ist Null nur des Quantums,
nicht eine qualitative Null,
sondern als Null des Quantums vielmehr reines Moment nur des Verhältnisses.

Sie ist nicht ein Unterschied um eine größe;
aber darum ist es einerseits überhaupt schief,
jene Momente, welche unendlich kleine Größen heißen,
auch als Inkremente oder Dekremente und als Differenzen auszusprechen.

Dieser Bestimmung liegt zugrunde,
daß zu der zuerst vorhandenen endlichen größe
etwas hinzukomme oder davon abgezogen werde,
eine Subtraktion oder Addition,
eine arithmetische, äußerliche Operation vorgehe.

Der Übergang von der Funktion der veränderlichen größe in ihr Differential
ist aber anzusehen, daß er von ganz anderer Natur ist,
nämlich, wie erörtert worden,
daß er als Zurückführung der endlichen Funktion
auf das qualitative Verhältnis ihrer Quantitätsbestimmungen
zu betrachten ist.

- Andererseits fällt die schiefe Seite für sich auf, wenn gesagt wird,
daß die Inkremente für sich Nullen seien,
daß nur ihre Verhältnisse betrachtet werden;
denn eine Null hat überhaupt keine Bestimmtheit mehr.

Diese Vorstellung kommt also zwar bis zum Negativen des Quantums
und spricht es bestimmt aus,
aber faßt dies Negative nicht zugleich in seiner positiven Bedeutung
von qualitativen Quantitätsbestimmungen,
die, wenn sie aus dem Verhältnisse gerissen
und als Quanta genommen werden wollten,
nur Nullen wären.

- Lagrange ((303)) (Theorie des fonctions analytiques [Paris 1797], Introd.)
urteilt über die Vorstellung der Grenzen oder letzten Verhältnisse, daß,
wenn man gleich sehr gut das Verhältnis zweier Größen sich vorstellen könne,
solange sie endlich bleiben,
so gebe dies Verhältnis dem Verstande
keinen deutlichen und bestimmten Begriff,
sobald seine Glieder zugleich Null werden.

- In der Tat muss der Verstand über diese bloß negative Seite,
daß die Verhältnisglieder Nullen als Quanta sind, hinausgehen
und sie positiv, als qualitative Momente auffassen.

- Was aber Euler (am angeführten Ort § 84 ff.)
weiter in betreff der gegebenen Bestimmung hinzufügt,

um zu zeigen, daß zwei sogenannte unendlich kleine Größen,
welche nichts anderes als Nullen sein sollen,
doch ein Verhältnis zueinander haben
und deswegen auch nicht das Zeichen der Null,
sondern andere Zeichen für sie im Gebrauch seien,
kann nicht für genügend angesehen werden.

Er will dies durch den Unterschied
des arithmetischen und geometrischen Verhältnisses begründen;
bei jenem sehen wir auf die Differenz, bei diesem auf den Quotienten;
obgleich das erstere zwischen zwei Nullen gleich sei,
so sei es deswegen doch das geometrische nicht;
wenn 2 : 1 = 0 : 0, so müsse wegen der Natur der Proportion,
da das erste Glied doppelt so groß sei als das zweite,
auch das dritte Glied doppelt so groß als das vierte sein;
0 : 0 soll also nach der Proportion
als das Verhältnis von 2 : 1 genommen werden.

- Auch nach der gemeinen Arithmetik sei n : 0 = 0;
es sei also n : 1 = 0 : 0.

- Allein eben dadurch, daß 2 : 1 oder n : 1 ein Verhältnis von Quantis ist,
entspricht ihm nicht ein Verhältnis noch eine Bezeichnung von 0 : 0.

Ich enthalte mich, die Anführungen zu vermehren,
indem die betrachteten zur Genüge gezeigt haben,
daß in ihnen wohl der wahrhafte Begriff des Unendlichen liegt,
daß er aber nicht in seiner Bestimmtheit herausgehoben
und gefaßt worden ist.

Indem daher zur Operation selbst fortgegangen wird,
so kann es nicht geschehen,
daß in ihr die wahrhafte Begriffsbestimmung sich geltend mache;
die endliche Quantitätsbestimmtheit ((304)) kehrt vielmehr zurück,
und die Operation kann der Vorstellung eines bloß relativ Kleinen
nicht entbehren.

Der Kalkül macht es notwendig, die sogenannten unendlichen Größen
den gewöhnlichen arithmetischen Operationen des Addierens usf.,

welche sich auf die Natur endlicher Größen gründen,
zu unterwerfen und sie somit als endliche Größen
für einen Augenblick gelten zu lassen und als solche zu behandeln.

Der Kalkül hätte sich darüber zu rechtfertigen,
daß er sie das eine Mal in diese Sphäre herabzieht
und sie als Inkremente oder Differenzen behandelt,
und daß er auf der andern Seite sie als Quanta vernachlässigt,
nachdem er soeben Formen und Gesetze der endlichen Größen
auf sie angewendet hatte.

Über die Versuche der Geometer, diese Schwierigkeiten zu beseitigen,
führe ich noch das Hauptsächlichste an.

Die älteren Analytiker machten sich hierüber weniger Skrupel;
aber die Bemühungen der Neueren gingen vornehmlich dahin,
den Kalkül des Unendlichen
zur Evidenz der eigentlich geometrischen Methode zurückzubringen
und in ihr die Strenge der Beweise der Alten (Ausdrücke von Lagrange)
in der Mathematik zu erreichen.

Allein da das Prinzip der Analysis des Unendlichen höherer Natur
als das Prinzip der Mathematik endlicher Größen ist,
so musste jene von selbst sogleich auf jene Art von Evidenz Verzicht tun,
wie die Philosophie auch auf diejenige Deutlichkeit
keinen Anspruch machen kann,
die die Wissenschaften des Sinnlichen, z. B. Naturgeschichte hat,
- und wie Essen und Trinken für ein verständlicheres Geschäft gilt
als Denken und Begreifen.

Es wird sich demnach nur um die Bemühung handeln,
die Strenge der Beweise der Alten zu erreichen.

Mehrere haben versucht, den Begriff des Unendlichen ganz zu entbehren
und ohne ihn das zu leisten, was an den Gebrauch desselben gebunden schien.

- Lagrange spricht z. B. von der Methode, die Landen ° erfunden hat,

und sagt von ((305)) ihr, daß sie rein analytisch sei
und die unendlich kleinen Differenzen nicht gebrauche,
sondern zuerst verschiedene Werte der veränderlichen Größen einführe
und sie in der Folge gleichsetze.

Er urteilt übrigens, daß darin die der Differentialrechnung eigenen Vorzüge,
Einfachheit der Methode und Leichtigkeit der Operationen verlorengehe.

- Es ist dies wohl ein Verfahren,
das mit demjenigen etwas Entsprechendes hat,
von welchem Descartes' Tangentenmethode ausgeht,
die weiterhin noch näher zu erwähnen ist.

Soviel, kann hier bemerkt werden, erhellt sogleich im allgemeinen,
daß das Verfahren überhaupt,
verschiedene Werte der veränderlichen Größen anzunehmen
und sie nachher gleichzusetzen,
einem anderen Kreise mathematischer Behandlung angehört
als die Methode des Differentialkalküls selbst
und die späterhin näher zu erörternde
Eigentümlichkeit des einfachen Verhältnisses,
auf welches sich die wirkliche konkrete Bestimmung desselben zurückführt,
nämlich der abgeleiteten Funktion zu der ursprünglichen,
nicht herausgehoben wird.

Die Älteren unter den Neueren, wie z. B. Fermat °, Barrows ° und andere,
die sich zuerst des Unendlichkleinen in derjenigen Anwendung bedienten,
welche später zur Differential- und Integralrechnung ausgebildet wurde,
und dann auch Leibniz und die folgenden, auch Euler,
haben immer unverhohlen die Produkte von unendlichen Differenzen
sowie ihre höheren Potenzen
nur aus dem Grunde weglassen zu dürfen geglaubt,
weil sie relativ gegen die niedrige Ordnung verschwinden.

Hierauf beruht bei ihnen allein der Fundamentalsatz,
nämlich die Bestimmung dessen,
was das Differential eines Produkts oder einer Potenz sei,
denn hierauf reduziert sich die ganze theoretische Lehre.

Das übrige ist teils Mechanismus der Entwicklung,
teils aber Anwendung, in welche jedoch, was weiterhin zu betrachten ist,
in der Tat auch das höhere oder vielmehr einzige Interesse ((306)) fällt.

- In Rücksicht auf das Gegenwärtige
ist hier nur das Elementarische anzuführen,
daß aus dem gleichen Grunde der Unbedeutendheit
als der Hauptsatz, die Kurven betreffend, angenommen wird,
daß die Elemente der Kurven,
nämlich die Inkremente der Abszisse und der Ordinate,
das Verhältnis der Subtangente und der Ordinate zueinander haben;
für die Absicht, ähnliche Dreiecke zu erhalten, wird der Bogen,
der die dritte Seite eines Dreiecks zu den beiden Inkrementen
des mit Recht vormals sogenannten charakteristischen Dreiecks ausmacht,
als eine gerade Linie, als Teil der Tangente
und damit das eine der Inkremente bis an die Tangente reichend angesehen.

Diese Annahmen erheben jene Bestimmungen
einerseits über die Natur endlicher Größen;
andererseits aber wird ein Verfahren
auf die nun unendlich genannten Momente angewendet,
das nur von endlichen Größen gilt
und bei dem nichts aus Rücksicht der Unbedeutendheit
vernachlässigt werden darf.

Die Schwierigkeit, von der die Methode gedrückt wird,
bleibt bei solcher Verfahrensweise in ihrer ganzen Stärke.

Es ist hier eine merkwürdige Prozedur Newtons anzuführen
(Philosophiae natralis principia mathematica, Lib. II, Lemma II, nach Propos. VII),
- die Erfindung eines sinnreichen Kunststücks,
um das arithmetisch unrichtige Weglassen
der Produkte unendlicher Differenzen
oder höherer Ordnungen derselben
bei dem Finden der Differentialien zu beseitigen.

Er findet das Differential des Produkts
- woraus sich dann die Differentialien der Quotienten, Potenzen usf.
leicht herleiten - auf folgende Art.

Das Produkt, wenn x, y,
jedes um die Hälfte seiner unendlichen Differenz kleiner genommen wird,
geht über in $xy - xdy/2 - ydx/2 + dxdy/4$;
aber wenn man x und y um ebensoviel zunehmen läßt,
in $xy + xdy/2 + ydx/2 + dxdy/4$.

Von diesem zweiten Produkt nun das erste abgezogen,
bleibt $ydx + xdy$ als Überschuß,
und dies sei der Überschuß des Wachstums um ein ganzes dx und dy,
denn um dieses Wachstum sind beide Produkte unterschieden;
es ist also das Differential von xy.

- Man ((307)) sieht, in diesem Verfahren fällt das Glied,
welches die Hauptschwierigkeit ausmacht,
das Produkt der beiden unendlichen Differenzen, dxdy,
durch sich selbst hinweg.

Aber des Newtonschen Namens unerachtet muss es gesagt werden dürfen,
daß solche, obgleich sehr elementarische Operation, unrichtig ist;
es ist unrichtig, daß
$(x + dx/2) (y + dy/2) - (x - dx/2) (y - dy/2) = (x + dx) (y + dy) - xy$.

Es kann nur das Bedürfnis sein,
den Fluxionenkalkül bei seiner Wichtigkeit zu begründen,
was einen Newton dahin bringen konnte,
die Täuschung solchen Beweisens sich zu machen.

Andere Formen, die Newton bei der Ableitung des Differentials gebraucht,
sind an konkrete, auf Bewegung sich beziehende Bedeutungen der Elemente
und deren Potenzen gebunden.

- Beim Gebrauche der Reihenform, der sonst seine Methode auszeichnet,
liegt es zu nahe zu sagen, daß man es immer in seiner Macht habe,
durch das Hinzufügen weiterer Glieder
die größe so genau zu nehmen, als man nötig habe,
und daß die weggelassenen relativ unbedeutend,
überhaupt das Resultat nur eine Näherung sei,
als daß er nicht auch hier mit diesem Grunde sich begnügt hätte,

wie er bei seiner Methode der Auflösung der Gleichungen höherer Grade
durch Näherung die höheren Potenzen,
die bei der Substitution jedes gefundenen, noch ungenauen Wertes
in die gegebene Gleichung entstehen,
aus dem rohen Grunde ihrer Kleinigkeit wegläßt;
s. Lagrange, Equations numeriques [1798], p. 125.

Der Fehler, in welchen Newton bei der Auflösung eines Problems
durch das Weglassen wesentlicher höherer Potenzen verfiel,
der seinen Gegnern die Gelegenheit eines Triumphs
ihrer Methode über die seinige gab
und von welchem Lagrange in seiner neuerlichen Untersuchung desselben
(Theorie des fonctions analytiques, 3me P., Ch. IV)
den wahren Ursprung aufgezeigt hat,
beweist das Formelle und die Unsicherheit,
die im Gebrauche jenes Instruments noch ((308)) vorhanden war.

Lagrange zeigt, daß Newton dadurch in den Fehler fiel,
weil er das Glied der Reihe vernachlässigte, das die Potenz enthielt,
auf welche es in der bestimmten Aufgabe ankam.

Newton hatte sich an jenes formelle oberflächliche Prinzip,
Glieder wegen ihrer relativen Kleinheit wegzulassen, gehalten.

- Es ist nämlich bekannt, daß in der Mechanik den Gliedern der Reihe,
in der die Funktion einer Bewegung entwickelt wird,
eine bestimmte Bedeutung gegeben wird,
so daß sich das erste Glied oder die erste Funktion
auf das Moment der Geschwindigkeit,
die zweite auf die beschleunigende Kraft
und die dritte auf den Widerstand von Kräften beziehe.

Die Glieder der Reihe sind hiermit hier
nicht nur als Teile einer Summe anzusehen,
sondern als qualitative Momente eines Ganzen des Begriffs.

Hierdurch erhält das Weglassen der übrigen Glieder,
die der schlecht unendlichen Reihe angehören,
eine gänzlich verschiedene Bedeutung

von dem Weglassen aus dem Grunde der relativen Kleinheit derselben. °

° Fuß
In einfacher Weise finden sich bei Lagrange
in der Anwendung der Theorie der Funktionen auf die Mechanik,
in dem Kapitel von der geradlinigen Bewegung,
beide Rücksichten nebeneinander gestellt
(Theorie des foncions, 3me P., Ch. 1, art. 4).

Der durchlaufene Raum als Funktion der verflossenen Zeit betrachtet,
gibt die Gleichung x = ft;
+++diese als f (t + *) entwickelt, gibt ft + f ' t + ('²/2) f'' t + usw.*

Also der während der Zeit durchlaufene Raum stellt sich in der Formel dar:
= f ' t + (²/2) *f ' ' t + (³/23) f ' ' ' t + usw.*

Die Bewegung, vermittels derer dieser Raum durchlaufen wird,
ist also, wird gesagt
- d. h. weil die analytische Entwicklung mehrere,
und zwar unendlich viele Glieder gibt -,
zusammengesetzt aus verschiedenen partiellen Bewegungen,
deren der Zeit entsprechende Räume sein werden
f ' t, (*'²/2) f'' t, (*³/2*3) f ' ' ' t, usw.

Die erste partielle Bewegung ist, in bekannter Bewegung,
die formell-gleichförmige mit einer durch f ' t bestimmten Geschwindigkeit,
die zweite die gleichförmig beschleunigte,
die von einer dem f ' ' t proportionierten beschleunigenden Kraft herkommt.

»Da nun die übrigen Glieder
sich auf keine einfache bekannte Bewegung beziehen,
so ist nicht nötig, sie besonders in Rücksicht zu nehmen,
und wir werden zeigen, daß man von ihnen
in der Bestimmung der Bewegung zu Anfang des Zeitpunkts
abstrahieren kann.«

Dies wird nun gezeigt,
aber freilich nur durch die Vergleichung jener Reihe,((309))
deren Glieder alle zur Bestimmung der größe

des in der Zeit durchlaufenen Raumes gehörten,
mit der art. 3 für die Bewegung des Falls angegebenen Gleichung $x = at + bt^2$,
als in welcher nur diese zwei Glieder vorkommen.

Aber diese Gleichung hat selbst nur diese Gestalt
durch die Voraussetzung der Erklärung,
die den durch analytische Entwicklung entstehenden Gliedern
gegeben wird, erhalten;
diese Voraussetzung ist, daß die gleichförmig beschleunigte Bewegung
zusammengesetzt sei aus einer formell-gleichförmigen,
mit der im vorhergehenden Zeitteile
erlangten Geschwindigkeit fortgesetzten Bewegung
und einem Zuwachse (dem a in $s = a t^2$, d. i. dem empirischen Koeffizienten),
welcher der Kraft der Schwere zugeschrieben wird,
- einem Unterschiede, der keineswegs in der Natur der Sache
irgendeine Existenz oder Grund hat,
sondern nur der fälschlich physikalisch gemachte Ausdruck dessen ist,
was bei einer angenommenen analytischen Behandlung herauskommt.
° EndeFuß

Die Newtonsche Auflösung enthielt jenen Fehler,
nicht weil in ihr Glieder der Reihe nur als Teile einer Summe,
sondern weil das Glied,
das die qualitative Bestimmung, auf die es ankam, enthält,
nicht berücksichtigt wurde.

In diesem Beispiele ist der qualitative Sinn dasjenige,
wovon das Verfahren abhängig gemacht ist.

Im Zusammenhange hiermit kann sogleich
die allgemeine Behauptung aufgestellt werden,
daß die ganze Schwierigkeit des Prinzips beseitigt sein würde, wenn
- statt des Formalismus, die Bestimmung des Differentials
nur in die ihm den Namen gebende Aufgabe,
den Unterschied überhaupt einer Funktion von ihrer Veränderung,
nachdem ihre veränderliche größe einen Zuwachs erhalten, zu stellen -
die qualitative Bedeutung des Prinzips angegeben
und die Operation hiervon abhängig gemacht wäre.

In diesem Sinne zeigt sich das Differential von x@
durch das erste Glied der Reihe,
die durch die Entwicklung von (x + dx)@ sich ergibt, gänzlich erschöpft.

Daß die übrigen Glieder nicht berücksichtigt werden,
kommt so nicht von ihrer relativen Kleinheit her;
- es wird dabei nicht eine Ungenauigkeit, ein Fehler oder Irrtum vorausgesetzt,
der durch einen anderen Irrtum ausgeglichen und verbessert würde;
eine Ansicht, von welcher aus Carnot
vornehmlich die gewöhnliche Methode der Infinitesimalrechnung rechtfertigt.

Indem es sich nicht um eine Summe, sondern um ein Verhältnis handelt,
so ist das Differential vollkommen ((310)) durch das erste Glied gefunden;
und wo es fernerer Glieder, der Differentiale höherer Ordnungen bedarf,
so liegt in ihrer Bestimmung nicht die Fortsetzung einer Reihe als Summe,
sondern die Wiederholung eines und desselben Verhältnisses,
das man allein will und das somit im ersten Glied bereits vollkommen ist.

Das Bedürfnis der Form einer Reihe des Summierens derselben
und was damit zusammenhängt
muss dann ganz von jenem Interesse des Verhältnisses getrennt werden.

Die Erläuterungen, welche Carnot
über die Methode der unendlichen Größen gibt,
enthalten das Geläutertste und aufs klarste exponiert,
was in den oben angeführten Vorstellungen vorkam.

Aber bei dem Übergange zur Operation selbst
treten mehr oder weniger die gewöhnlichen Vorstellungen
von der unendlichen Kleinheit der weggelassenen Glieder
gegen die anderen ein.

Er rechtfertigt die Methode viel mehr durch die Tatsache,
daß die Resultate richtig werden,
und durch den Nutzen,
den die Einführung unvollkommener Gleichungen, wie er sie nennt,
d. h. solcher, in denen eine solche arithmetisch unrichtige Weglassung
geschehen ist,
für die Vereinfachung und Abkürzung des Kalküls habe,

als durch die Natur der Sache selbst.

Lagrange hat bekanntlich die ursprüngliche Methode Newtons,
die Methode der Reihen, wieder aufgenommen,
um der Schwierigkeiten, welche die Vorstellung des Unendlichkleinen,
sowie derjenigen, welche die Methode der ersten und letzten Verhältnisse
und Grenzen mit sich führt,
überhoben zu sein.

Es ist von seinem Funktionenkalkül, dessen sonstige Vorzüge in Rücksicht
auf Präzision, Abstraktion und Allgemeinheit anerkannt genug sind,
als hierher gehörig nur dies anzuführen,
daß er auf dem Fundamentalsatze beruht,
daß die Differenz, ohne daß sie Null werde,
so klein angenommen werden könne,
daß jedes Glied der Reihe die Summe aller folgende an größe übertreffe.

- Es wird auch in dieser Methode von den Kategorien vom Zuwachs
und von der Differenz der Funktion angefangen,
deren veränderliche größe den Zuwachs erhalte,
womit die lästige Reihe hereinkommt, von der ursprünglichen Funktion;
so wie im Verfolg die wegzulassenden Glieder der Reihe
nur in der Rücksicht, daß sie eine Summe konstituieren, in Betracht kommen
und der Grund, sie wegzulassen,
in das Relative ihres Quantums gesetzt wird.

Die Weglassung ist also hier auch nicht für das Allgemeine
auf den Gesichtspunkt zurückgeführt,
der teils in einigen Anwendungen vorkommt, worin, wie vorhin erinnert,
die Glieder der Reihe eine bestimmte qualitative Bedeutung haben sollen
und Glieder außer acht gelassen werden,
nicht darum, weil sie unbedeutend an größe sind,
sondern weil sie unbedeutend der Qualität nach sind;
teils aber fällt dann die Weglassung selbst
in dem wesentlichen Gesichtspunkte hinweg,
der sich für den sogenannten Differentialkoeffizienten erst
in der sogenannten Anwendung des Kalküls bei Lagrange
bestimmt heraushebt,
was in der folgenden Anmerkung [S. 322 ff.]

ausführlicher auseinandergesetzt werden wird.

Der qualitative Charakter überhaupt,
der hier an der in Rede stehenden Größenform in demjenigen,
was dabei das Unendlichkleine genannt wird, nachgewiesen worden ist,
findet sich am unmittelbarsten in der Kategorie der Grenze des Verhältnisses,
die oben angeführt worden und deren Durchführung im Kalkül
zu einer eigentümlichen Methode gestempelt worden ist.

Was Lagrange von dieser Methode urteilt,
daß sie der Leichtigkeit in der Anwendung entbehre
und der Ausdruck Grenze keine bestimmte Idee darbiete,
davon wollen wir das Zweite hier aufnehmen und näher sehen,
was über ihre analytische Bedeutung aufgestellt wird.

In der Vorstellung der Grenze liegt nämlich wohl die angegebene wahrhafte
Kategorie der qualitativen Verhältnisbestimmung der veränderlichen Größen;
denn die Formen, die von ihnen eintreten, dx und dy,
sollen schlechthin nur als Momente von dy/dx genommen
und dx/dy selbst als ein einziges unteilbares Zeichen angesehen werden.

Daß hiermit für den Mechanismus des Kalküls
besonders in seiner Anwendung ((312)) der Vorteil verlorengeht,
den er davon zieht,
daß die Seiten des Differentialkoeffizienten voneinander abgesondert werden,
ist hier beiseite zu setzen.

Jene Grenze soll nun Grenze von einer gegebenen Funktion sein;
- sie soll einen gewissen Wert in Beziehung auf dieselbe angeben,
der sich durch die Weise der Ableitung bestimmt.

Mit der bloßen Kategorie der Grenze aber wären wir nicht weiter
als mit dem, um das es in dieser Anm. zu tun gewesen ist,
nämlich aufzuzeigen, daß das Unendlichkleine,
das in der Differentialrechnung als dx und dy vorkommt,
nicht bloß den negativen, leeren Sinn
einer nicht endlichen, nicht gegebenen größe habe
- wie wenn man sagt:
eine unendliche Menge, ins Unendliche fort und dergleichen -,

sondern den bestimmten Sinn der qualitativen Bestimmtheit des Quantitativen,
eines Verhältnismoments als eines solchen.

Diese Kategorie hat jedoch so noch kein Verhältnis zu dem,
was eine gegebene Funktion ist,
und greift für sich nicht in die Behandlung einer solchen
und in einen Gebrauch,
der an ihr von jener Bestimmung zu machen wäre, ein;
so würde auch die Vorstellung der Grenze,
zurückgehalten in dieser von ihr nachgewiesenen Bestimmtheit,
zu nichts führen.

Aber der Ausdruck Grenze enthält es schon selbst,
daß sie Grenze von etwas sei, d. h. einen gewissen Wert ausdrücke,
der in der Funktion veränderlicher größe liegt;
und es ist zu sehen, wie dies konkrete Benehmen mit ihr beschaffen ist.

- Sie soll die Grenze des Verhältnisses sein,
welches die zwei Inkremente zueinander haben,
um welche die zwei veränderlichen Größen,
die in einer Gleichung verbunden sind,
deren die eine als eine Funktion der anderen angesehen wird,
als zunehmend angenommen worden;
der Zuwachs wird hier unbestimmt überhaupt genommen
und insofern von dem Unendlichkleinen kein Gebrauch gemacht.

Aber zunächst führt der Weg, diese Grenze zu finden,
dieselben Inkonsequenzen herbei, die in den übrigen Methoden liegen.

Dieser Weg ist nämlich folgender.

Wenn $y = fx$, soll fx, wenn y in $y + k$ übergeht,
sich in $fx + ph + qh^2 + rh^3$ usf. verändern,
hiermit ist $k = ph + qh^2$ usf. ((313)) und $k/h = p + qh + rh^2$ usf.

Wenn nun k und h verschwinden,
so verschwindet das zweite Glied außer p,
welches p nun die Grenze des Verhältnisses der beiden Zuwächse sei.

Man sieht, daß h als Quantum = 0 gesetzt wird,

aber daß darum k/h nicht zugleich = 0/0 sein,
sondern noch ein Verhältnis bleiben soll.

Den Vorteil, die Inkonsequenz, die hierin liegt, abzulehnen,
soll nun die Vorstellung der Grenze gewähren;
p soll zugleich nicht das wirkliche Verhältnis, das = 0/0 wäre,
sondern nur der bestimmte Wert sein,
dem sich das Verhältnis unendlich, d. i. so nähern könne,
daß der Unterschied kleiner als jeder gegebene werden könne.

Der bestimmtere Sinn der Näherung in Rücksicht dessen,
was sich eigentlich einander nähern soll, wird unten betrachtet werden.

- Daß aber ein quantitativer Unterschied, der die Bestimmung hat,
kleiner als jeder gegebene sein zu können nicht nur, sondern sein zu sollen,
kein quantitativer Unterschied mehr ist, dies ist für sich klar,
so evident, als irgend etwas in der Mathematik evident sein kann;
damit aber ist über dy/dx = 0/0 nicht hinausgekommen worden.

Wenn dagegen dy/dx = p,
d. i. als ein bestimmtes quantitatives Verhältnis angenommen wird,
wie dies in der Tat der Fall ist,
so kommt umgekehrt die Voraussetzung,
welche h = 0 gesetzt hat, in Verlegenheit,
eine Voraussetzung, durch welche allein k/h = p gefunden wird.

Gibt man aber zu, daß k/h- = 0 ist
- und mit h = 0 wird in der Tat von selbst auch k = 0,
denn der Zuwachs k zu y findet nur unter der Bedingung statt,
daß der Zuwachs h ist -,
so wäre zu fragen, was denn p sein solle,
welches ein ganz bestimmter quantitativer Wert ist.

Hierauf gibt sich sogleich die einfache, trockene Antwort von selbst,
daß es ein Koeffizient ist und aus welcher Ableitung er entsteht,
- die auf gewisse bestimmte Weise abgeleitete
erste Funktion einer ursprünglichen Funktion.

Begnügte man sich damit,
wie denn in der Tat Lagrange sich der ((314)) Sache nach

damit begnügt hat,
so wäre der allgemeine Teil der Wissenschaft des Differentialkalküls
und unmittelbar diese seine Form selbst,
welche die Theorie der Grenzen heißt,
von den Zuwächsen, dann deren unendlicher oder beliebiger Kleinheit,
von der Schwierigkeit, außer dem ersten Gliede
oder vielmehr nur dem Koeffizienten des ersten Gliedes
die weiteren Glieder einer Reihe,
als welche durch die Einführung jener Zuwächse unabwendbar sich einfinden,
wieder wegzubringen, befreit;
außerdem aber auch von dem Weiteren, was damit zusammenhängt,
von den formellen Kategorien vor allem des Unendlichen,
der unendlichen Annäherung
und der weiteren hier ebenso leeren Kategorien von kontinuierlicher größe °
und welche man sonst, wie Bestreben, Werden,
Gelegenheit einer Veränderung,
für nötig erachtet, gereinigt.

° Fuß
Die Kategorie von der kontinuierlichen oder fließenden größe
stellt sich mit der Betrachtung
der äußerlichen und empirischen Veränderung der Größen,
die durch eine Gleichung in die Beziehung,
daß die eine eine Funktion der anderen ist, gebracht sind,
ein;
da aber der wissenschaftliche Gegenstand der Differentialrechnung
ein gewisses
(durch den Differentialkoeffizienten gewöhnlich ausgedrücktes) Verhältnis,
welche Bestimmtheit ebensowohl Gesetz genannt werden kann, ist,
so ist für diese spezifische Bestimmtheit die bloße Kontinuität
teils schon eine fremdartige Seite,
teils aber auf allen Fall die abstrakte und hier leere Kategorie,
da über das Gesetz der Kontinuität gar nichts damit ausgedrückt ist.

- Auf welche formelle Definitionen dabei vollends verfallen wird,
ist aus meines verehrten Herrn Kollegen, Prof. Dirksen °,
scharfsinniger allgemeiner Darstellung der Grundbestimmungen,
die für die Deduktion des Differentialkallküls gebraucht werden,
welche sich an die Kritik einiger neuerer Werke

über diese Wissenschaft anschließt
und sich in den Jahrbüchern für wissenschaftliche Kritik,
1827, Nr. 153ff., befindet, zu ersehen;
es wird daselbst S. 1251 sogar die Definition angeführt:
»Eine stetige oder kontinuierliche größe, Kontinuum, ist jede größe,
welche man sich im Zustande des Werdens gedenkt,
so daß dieses Werden nicht sprungweise,
sondern durch ununterbrochenen Fortgang geschieht.«

Das ist doch wohl tautologisch dasselbe, was das definitum ist.
°EndeFuß

Aber dann würde gefordert zu zeigen,
was denn p außer der für die Theorie ganz genügenden trockenen Bestimmung,
daß es weiter nichts als eine aus der Entwicklung eines Binomiums
abgeleitete Funktion ((315)) ist,
noch für eine Bedeutung und Wert,
d. i. welchen Zusammenhang und Gebrauch
für weiteres mathematisches Bedürfnis habe;
hiervon soll die zweite Anmerkung handeln.

- Es folgt aber zunächst hier noch die Auseinandersetzung der Verwirrung,
welche durch den angeführten, in den Darstellungen so geläufigen Gebrauch
der Vorstellung von Annäherung
in das Auffassen der eigentlichen, qualitativen Bestimmtheit des Verhältnisses,
um das es zunächst zu tun war, gebracht worden ist.

Es ist gezeigt worden, daß die sogenannten unendlichen Differenzen
das Verschwinden der Seiten des Verhältnisses als Quantorum ausdrücken
und daß das, was übrigbleibt, ihr Quantitätsverhältnis ist,
rein insofern es auf qualitative Weise bestimmt ist;
das qualitative Verhältnis geht hierin so wenig verloren,
daß es vielmehr dasjenige ist,
was eben durch die Verwandlung endlicher Größen in unendliche resultiert.

Hierin besteht, wie wir gesehen, die ganze Natur der Sache.

- So verschwinden im letzten Verhältnisse

z. B. die Quanta der Abszisse und der Ordinate;
aber die Seiten dieses Verhältnisses bleiben wesentlich
die eine Element der Ordinate, die andere Element der Abszisse.

Indem die Vorstellungsweise gebraucht wird,
daß man die eine Ordinate sich der anderen unendlich nähern läßt,
so geht die vorher unterschiedene Ordinate in die andere Ordinate
und die vorher unterschiedene Abszisse in die andere Abszisse über;
aber wesentlich geht nicht die Ordinate in die Abszisse
oder die Abszisse in die Ordinate über.

Das Element der Ordinate,
um bei diesem Beispiele von veränderlichen Größen stehenzubleiben,
ist nicht als der Unterschied einer Ordinate
von einer anderen Ordinate zu nehmen,
sondern ist vielmehr als der Unterschied
oder die qualitative Größenbestimmung gegen das Element der Abszisse;
das Prinzip der einen veränderlichen größe gegen das der anderen
steht im Verhältnisse miteinander.

Der Unterschied, indem er nicht mehr Unterschied endlicher Größen ist,
hat aufgehört, ein Vielfaches innerhalb seiner selbst zu sein;
er ist in die einfache Intensität zusammengesunken,
in die Bestimmtheit eines qualitativen Verhältnismoments gegen das andere.

Diese Beschaffenheit der Sache wird aber dadurch verdunkelt,
daß das, was soeben Element z. B. der Ordinate genannt worden,
so als Differenz oder Inkrement gefaßt wird,
daß es nur der Unterschied des Quantums einer Ordinate
zwischen dem Quantum einer anderen Ordinate sei.

Die Grenze hat hiermit hier nicht den Sinn des Verhältnisses;
sie gilt nur als der letzte Wert,
dem sich eine andere größe von gleicher Art beständig so nähere,
daß sie von ihm, sowenig als man will, unterschieden sein könne
und daß das letzte Verhältnis ein Verhältnis der Gleichheit sei.

So ist die unendliche Differenz
das Schweben eines Unterschieds eines Quantums von einem Quantum,
und die qualitative Natur, nach welcher dx

wesentlich nicht eine Verhältnisbestimmung gegen x, sondern gegen dy ist,
tritt in der Vorstellung zurück.

Man läßt dx^2 gegen dx verschwinden,
aber noch vielmehr verschwindet dx gegen x,
dies heißt aber wahrhaftig: es hat nur ein Verhältnis zu dy.

- Es ist den Geometern in solchen Darstellungen
immer vorzüglich darum zu tun,
die Annäherung einer größe an ihre Grenze begreiflich zu machen
und sich an diese Seite des Unterschiedes des Quantums vom Quantum,
wie er kein Unterschied und doch noch ein Unterschied ist, zu halten.

Aber die Annäherung ist ohnehin für sich eine nichtssagende
und nichts begreiflich machende Kategorie;
dx hat die Annäherung bereits im Rücken,
es ist nicht nahe noch ein Näheres;
und unendlich nahe heißt selbst die Negation des Naheseins und des Annäherns.

Indem es nun damit geschehen ist,
daß die Inkremente oder unendlichen Differenzen
nur nach der Seite des Quantums, das in ihnen verschwindet,
und nur als Grenze desselben betrachtet worden sind,
so sind sie so als verhältnislose Momente gefaßt.

Es würde die unstatthafte Vorstellung daraus folgen, daß es erlaubt sei,
in dem letzten Verhältnisse etwa Abszisse und Ordinate
- oder auch Sinus, Kosinus, Tangente, Sinus versus und was alles noch -
einander gleichzusetzen. ((317))

- Diese Vorstellung scheint zunächst darin obzuwalten,
wenn ein Bogen als eine Tangente behandelt wird;
denn auch der Bogen ist wohl inkommensurabel mit der geraden Linie
und sein Element zunächst von anderer Qualität
als das Element der geraden Linie.

Es scheint noch widersinniger und unerlaubter
als die Verwechslung der Abszisse, Ordinate, des Sinus versus, Kosinus usf.,
wenn quadrata rotundis,

wenn ein obzwar unendlich kleiner Teil des Bogens
für ein Stück der Tangente genommen
und somit als gerade Linie behandelt wird.

- Allein diese Behandlung ist von der gerügten Verwechslung
wesentlich zu unterscheiden;
sie hat ihre Rechtfertigung darin, daß in dem Dreieck,
welches das Element eines Bogens
und die Elemente seiner Abszisse und der Ordinate zu seinen Seiten hat,
das Verhältnis dasselbe ist,
als wenn jenes Element des Bogens
das Element einer geraden Linie, der Tangente wäre;
die Winkel, welche das wesentliche Verhältnis konstituieren,
d. i. dasjenige, das diesen Elementen bleibt,
indem von den ihnen zugehörigen endlichen Größen abstrahiert wird,
sind die nämlichen.

- Man kann sich hierüber auch ausdrücken,
gerade Linien, als unendlich klein, seien in krumme Linien übergegangen,
und das Verhältnis ihrer in ihrer Unendlichkeit sei ein Kurvenverhältnis.

Da nach ihrer Definition die gerade Linie
der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten ist,
so gründet sich ihr Unterschied von krummer Linie
auf die Bestimmung von Menge,
auf die geringere Menge des Unterscheidbaren auf diesem Wege,
was also eine Bestimmung von Quantum ist.

Aber diese Bestimmung verschwindet in ihr
- sie als intensive größe, als unendliches Moment, als Element genommen -,
somit auch ihr Unterschied von der krummen Linie,
der bloß auf dem Quantumsunterschiede beruhte.

- Also als unendlich behält gerade Linie und Bogen kein quantitatives Verhältnis
und damit, aufgrund der angenommenen Definition,
auch keine qualitative Verschiedenheit mehr gegeneinander,
sondern geht jene vielmehr in diese über.

Verwandt, jedoch zugleich verschieden

von der Gleichsetzung ((318)) heterogener Bestimmungen
ist die für sich unbestimmte und völlig gleichgültige Annahme,
daß unendlich kleine Teile desselben Ganzen einander gleich seien;
jedoch angewandt auf einen in sich heterogenen,
d. i. mit wesentlicher Ungleichförmigkeit der Größenbestimmung
behafteten Gegenstand,
bringt sie die eigentümliche Verkehrung hervor,
die in dem Satze der höheren Mechanik enthalten ist,
daß in gleichen und zwar unendlich kleinen Zeiten
unendlich kleine Teile einer Kurve
in gleichförmiger Bewegung durchlaufen werden,
indem dies von einer Bewegung behauptet wird,
in der in gleichen endlichen, d. i. existierenden Zeitteilen
endliche, d. i. existierende ungleiche Teile der Kurve durchlaufen werden,
d. i. also von einer Bewegung, die als existierend ungleichförmig ist
und so angenommen wird.

Dieser Satz ist der Ausdruck desjenigen in Worten,
was ein analytisches Glied,
das sich in der oben auch angeführten Entwicklung der Formel
von ungleichförmiger, übrigens einem Gesetze gemäßer Bewegung ergibt,
bedeuten soll.

Ältere Mathematiker
suchten Ergebnisse der neu erfundenen Infinitesimalrechnung,
die ohnehin immer mit konkreten Gegenständen zu tun hatte,
in Worten und Sätzen auszudrücken
und sie in geometrischen Verzeichnungen darzustellen,
wesentlich um sie für die Lehrsätze
nach gewöhnlicher Beweisart zu gebrauchen.

Die Glieder einer mathematischen Formel,
in welche die analytische Behandlung die größe des Gegenstands,
z. B. der Bewegung, zerlegte,
erhielten dort eine gegenständliche Bedeutung,
z. B. der Geschwindigkeit, beschleunigenden Kraft usf.;
sie sollten nach solcher Bedeutung richtige Sätze,
physikalische Gesetze geben
und nach der analytischen Verbindung
auch ihre objektiven Verknüpfungen und Verhältnisse bestimmt sein,

wie z. B. eben daß in einer gleichförmig beschleunigten Bewegung
eine besondere, den Zeiten proportionale Geschwindigkeit existiere,
außerdem aber ein Zuwachs
von der Kraft der Schwere her immer hinzukomme.

Solche Sätze werden in der modernen, analytischen Gestalt der Mechanik
durchaus als Ergebnisse des ((319)) Kalküls aufgeführt,
unbekümmert darum, ob sie einen reellen Sinn,
d. i. dem eine Existenz entspräche,
für sich an ihnen selbst hätten, und um einen Beweis eines solchen;
die Schwierigkeit, den Zusammenhang solcher Bestimmungen,
wenn sie im ausgesprochenen reellen Sinn genommen werden,
z. B. den Übergang von jener schlecht gleichförmigen Geschwindigkeit
zu einer gleichförmigen beschleunigten begreiflich zu machen,
gilt dafür, durch die analytische Behandlung ganz beseitigt zu sein,
als in welcher solcher Zusammenhang einfache Folge
der nunmehrigen festen Autorität der Operationen des Kalküls ist.

Es wird für einen Triumph der Wissenschaft ausgegeben,
durch den bloßen Kalkül über die Erfahrung hinaus Gesetze,
d. i. Sätze der Existenz, die keine Existenz haben, zu finden.

Aber in der ersteren noch naiven Zeit des Infinitesimalkalküls
sollte von jenen Bestimmungen und Sätzen,
in geometrischen Verzeichnungen vorgestellt,
ein reeller Sinn für sich angegeben und plausibel gemacht
und sie in solchem Sinne zum Beweise von den Hauptsätzen,
um die es zu tun war, angewendet werden
(man sehe den Newtonschen Beweis
von seinem Fundamentalsatze der Theorie der Gravitation
in den Philosophiae naturalis principia mathematica,
lib. I, Sect. II, Prop. I. verglichen mit
[Fr. Th.] Schuberts [Theoretischer] Astronomie,erste Ausg. [Leipzig 1798], Bd. III, § 20,
wo zugestanden wird, daß es sich nicht genau so,
d. i. in dem Punkte, welcher der Nerv des Beweises ist,
sich nicht so verhalte, wie Newton annimmt).

Es wird nicht geleugnet werden können,
daß man sich in diesem Felde vieles als Beweis,

vornehmlich unter der Beihilfe des Nebels des Unendlichkleinen
hat gefallen lassen,
aus keinem anderen Grunde als dem,
daß das, was herauskam, immer schon vorher bekannt war
und der Beweis, der so eingerichtet wurde, daß es herauskam,
wenigstens den Schein eines Gerüstes von Beweis zustande brachte
- einen Schein, den man dem bloßen Glauben
oder dem Wissen aus Erfahrung immer noch vorzog.

Ich aber trage kein Bedenken, ((320))
diese Manier für nicht mehr als eine bloße Taschenspielerei
und Charlatanerie des Beweisens anzusehen
und hierunter selbst Newtonsche Beweise zu rechnen,
insbesondere die zu dem soeben Angeführten gehörigen,
wegen welcher man Newton bis an den Himmel
und über Kepler erhoben hat,
das, was dieser bloß durch Erfahrung gefunden,
mathematisch dargetan zu haben.

Das leere Gerüst solcher Beweise wurde errichtet,
um physische Gesetze zu beweisen.

Aber die Mathematik vermag überhaupt nicht
Größenbestimmungen der Physik zu beweisen, insofern sie Gesetze sind,
welche die qualitative Natur der Momente zum Grunde haben;
aus dem einfachen Grunde, weil diese Wissenschaft nicht Philosophie ist,
nicht vom Begriffe ausgeht und das Qualitative daher,
insofern es nicht lemmatischerweise aus der Erfahrung aufgenommen wird,
außer ihrer Sphäre liegt.

Die Behauptung der Ehre der Mathematik,
daß alle in ihr vorkommenden Sätze streng bewiesen sein sollen,
ließ sie ihre Grenze oft vergessen;
so schien es gegen ihre Ehre, für Erfahrungssätze
einfach die Erfahrung als Quelle und als einzigen Beweis anzuerkennen;
später ist das Bewußtsein hierüber gebildeter geworden;
ehe dieses aber über den Unterschied sich nicht klar wird,
was mathematisch beweisbar ist
und was nur anderwärts genommen werden kann,

wie darüber, was nur Glieder analytischer Entwicklung
und was physikalische Existenzen sind,
kann die Wissenschaftlichkeit sich nicht
zu strenger und reiner Haltung herausbilden.

- Jenem Gerüste Newtonschen Beweisens aber
wird ohne Zweifel noch dasselbe Recht widerfahren,
das einem anderen grundlosen Newtonschen Kunstgebäude
aus optischen Experimenten und damit verbundenem schließen
angetan worden ist.

Die angewandte Mathematik
ist noch voll von einem gleichen Gebräue aus Erfahrung und Reflexion;
aber wie von jener Optik seit geraumer Zeit
bereits ein Teil nach dem anderen anfing,
in der Wissenschaft faktisch ignoriert zu werden,
mit der Inkonsequenz jedoch, das übrige, obgleich damit Widersprechende
noch gewähren ((321)) zu lassen,
- so ist es auch Faktum, daß bereits ein Teil jener trügerischen Beweise
von selbst in Vergessenheit geraten oder durch andere ersetzt worden ist.

Anmerkung 2: Der Zweck des Differentialkalküls aus seiner Anwendung abgeleitet
In der vorigen Anmerkung
ist teils die Begriffsbestimmtheit des Unendlichkleinen,
das in dem Differentialkalkül gebraucht wird,
teils die Grundlage seiner Einführung in denselben betrachtet worden;
beides sind abstrakte und darum an sich auch leichte Bestimmungen;
die sogenannte Anwendung aber bietet größere Schwierigkeiten
sowohl als auch die interessantere Seite dar;
die Elemente dieser konkreten Seite
sollen der Gegenstand dieser Anmerkung sein.

- Die ganze Methode der Differentialrechnung ist in dem Satze,
daß dx@ = nx@ dx, oder (f (x+ i) - fx)/i = P,
d. i. gleich dem Koeffizienten des ersten Gliedes
des nach den Potenzen von dx oder i entwickelten
Binomiums x + d, x + i, absolviert.

Man bedarf weiter nichts zu erlernen;
die Ableitung der nächsten Formen, des Differentials eines Produkts,
einer Exponentialgröße usf. ergibt sich daraus mechanisch;
in wenig Zeit, vielleicht in einer halben Stunde
- mit dem Finden der Differentiale ist das Umgekehrte,
das Finden der ursprünglichen Funktion aus jenen,
die Integration gleichfalls gegeben
- kann man die ganze Theorie innehaben.

Was allein länger aufhält, ist die Bemühung, es einzusehen,
begreiflich zu machen, daß, nachdem der eine Umstand der Aufgabe,
das Finde jenes Koeffizienten, auf analytische, d. i. ganz arithmetische Weise,
durch die Entwicklung der Funktion der veränderlichen größe,
nachdem diese durch einen Zuwachs die Form eines Binomiums erhalten,
so leicht bewerkstelligt worden,
es auch mit dem anderen Umstand,
nämlich mit dem Weglassen der übrigen Glieder
der entstehenden Reihe außer den ersten, seine Richtigkeit habe.

Wäre es der Fall, daß man jenen Koeffizienten allein nötig ((322)) hätte,
so wäre mit der Bestimmung desselben alles, was die Theorie betrifft,
wie gesagt in weniger als einer halben Stunde abgetan,
und das Weglassen der weiteren Glieder der Reihe
machte so wenig eine Schwierigkeit,
daß vielmehr von ihnen als Gliedern der Reihe
(als zweiten, dritten usf. Funktionen ist ihre Bestimmung
schon mit der Bestimmung des ersten gleichfalls absolviert)
gar nicht die Rede wäre, da es um sie ganz und gar nicht zu tun ist.

Es kann die Bemerkung vorangeschickt werden,
daß man es der Methode des Differentialkalküls wohl sogleich ansieht,
daß sie nicht für sich selbst erfunden und aufgestellt worden ist;
sie ist nicht nur nicht für sich begründet
als eine andere Weise analytischen Verfahrens,
sondern die Gewaltsamkeit,
Glieder, die sich aus Entwicklung einer Funktion ergeben,
indem doch das Ganze dieser Entwicklung
vollständig zur Sache zu gehören angenommen ist
- weil die Sache als der Unterschied

der entwickelten Funktion einer veränderlichen größe
(nachdem dieser die Gestalt eines Binomiums gegeben worden)
von der ursprünglichen angesehen wird -,
geradezu wegzulassen,
widerspricht vielmehr durchaus allen mathematischen Grundsätzen.

Das Bedürfnis solcher Verfahrungsweise,
wie die ihr an ihr selbst mangelnde Berechtigung,
weist sogleich darauf hin,
daß anderswo der Ursprung und die Grundlage sich befinden müsse.

Es geschieht auch sonst in den Wissenschaften,
daß das, was als das Elementarische vornehin gestellt ist
und woraus die Sätze der Wissenschaft abgeleitet werden sollen,
nicht einleuchtend ist
und daß es sich ausweist, vielmehr in dem Nachfolgenden
seine Veranlassung und seine Begründung zu haben.

Der Hergang in der Geschichte des Differentialkalküls tut dar,
daß in den verschiedenen sogenannten Tangentialmethoden
vornehmlich die Sache gleichsam als in Kunststücken
den Anfang genommen hat;
die Art des Verfahrens,
nachdem es auch auf weitere Gegenstände ausgedehnt worden,
ist später zum Bewußtsein und in abstrakte Formeln gebracht worden,
welche nun auch zu Prinzipien zu erheben versucht wurde. ((323))

Als die Begriffsbestimmtheit des sogenannten Unendlichkleinen
ist die qualitative Quantitätsbestimmtheit solcher,
die zunächst als Quanta im Verhältnis zueinander gesetzt sind,
aufgezeigt worden,
woran sich die empirische Untersuchung knüpfte,
jene Begriffsbestimmtheit in den Beschreibungen
oder Definitionen nachzuweisen,
die sich von dem Unendlichkleinen,
insofern es als unendliche Differenz und dergleichen genommen ist,
vorfinden.

- Dies ist nur im Interesse

der abstrakten Begriffsbestimmtheit als solcher geschehen;
die weitere Frage wäre, wie von ihr der Übergang
zur mathematischen Gestaltung und Anwendung beschaffen wäre.

Zu dem Ende ist zuerst das Theoretische, die Begriffsbestimmtheit,
noch weiter vorzunehmen,
welche sich an ihr selbst nicht ganz unfruchtbar zeigen wird;
alsdann ist das Verhältnis derselben zur Anwendung zu betrachten
und bei beidem nachzuweisen, soweit es hier angeht,
daß die allgemeinen Folgerungen zugleich demjenigen,
um was es in der Differentialrechnung zu tun ist,
und der Art, wie sie es bewerkstelligt, angemessen sind.

Zunächst ist daran zu erinnern, daß die Form,
welche die in Rede stehende Begriffsbestimmtheit im Mathematischen hat,
bereits beiläufig angegeben ist.

Die qualitative Bestimmtheit des Quantitativen
ist zuerst im quantitativen Verhältnis überhaupt aufgewiesen;
es ist aber auch schon bei der Nachweisung
der unterschiedenen sogenannten Rechnungsarten (s. d. betr. Anm. [S.234 ff.])
antizipiert worden, daß das nachher an seiner eigentümlichen Stelle
noch zu betrachtende Potenzenverhältnis es ist,
worin die Zahl durch Gleichsetzung ihrer Begriffsmomente,
der Einheit und der Anzahl, als zu sich selbst zurückgekehrte gesetzt ist
und damit das Moment der Unendlichkeit,
des Fürsichseins, d. i. des Bestimmtseins durch sich selbst, an ihr erhält.

Die ausdrückliche qualitative Größenbestimmtheit bezieht sich somit,
wie gleichfalls schon erinnert, wesentlich auf Potenzenbestimmungen,
und da die Differentialrechnung das Spezifische hat,
mit qualitativen Größenformen zu operieren,
so muss ihr eigentümlicher ((324)) mathematischer Gegenstand
die Behandlung von Potenzenformen sein,
und die sämtlichen Aufgaben und deren Auflösungen,
zu deren Behuf die Differentialrechnung gebraucht wird,
zeigen es, daß das Interesse allein
in der Behandlung von Potenzenbestimmungen als solchen liegt.

So wichtig diese Grundlage ist
und sogleich an die Spitze etwas Bestimmtes stellt,
statt der bloß formellen Kategorien von veränderlichen,
kontinuierlichen oder unendlichen Größen und dergleichen
oder auch nur von Funktionen überhaupt, so ist sie noch zu allgemein;
andere Operationen haben gleichfalls damit zu tun;
schon das Erheben in die Potenz und Wurzelausziehen,
dann die Behandlung der Exponentialgrößen und Logarithmen,
Reihen, die Gleichungen höherer Ordnungen
haben ihr Interesse und ihre Bemühung allein
mit Verhältnissen, die auf Potenzen beruhen.

Ohne Zweifel müssen sie zusammen
ein System der Potenzenbehandlung ausmachen;
aber welches unter den verschiedenen Verhältnissen,
worin Potenzenbestimmungen gesetzt werden können,
dasjenige sei, das der eigentliche Gegenstand
und das Interesse für die Differentialrechnung ist,
dies ist aus dieser selbst,
d. i. aus den sogenannten Anwendungen derselben zu entnehmen.

Diese sind in der Tat die Sache selbst,
das wirkliche Verfahren in der mathematischen Auflösung
eines gewissen Kreises von Problemen;
dies Verfahren ist früher gewesen als die Theorie oder der allgemeine Teil,
und Anwendung ist dasselbe später genannt worden
nur in Beziehung auf die nachher erschaffene Theorie,
welche die allgemeine Methode des Verfahrens
teils aufstellen, teils ihr aber Prinzipien, d. i. Rechtfertigung geben wollte.

Welche vergebliche Bemühung es gewesen ist,
für die bisherige Auffassungsweise des Verfahrens Prinzipien aufzufinden,
welche den Widerspruch, der dabei zum Vorschein kommt, wirklich lösten,
statt ihn nur durch die Unbedeutendheit
des nach dem mathematischen Verfahren Notwendigen,
hier aber Wegzulassenden,
oder durch die auf dasselbe hinauslaufende Möglichkeit
der unendlichen oder beliebigen Annäherung ((325)) u. dgl.
zu entschuldigen oder zu verstecken,

ist in voriger Anmerkung gezeigt worden.

Wenn aus dem wirklichen Teil der Mathematik,
der die Differentialrechnung genannt wird,
das Allgemeine des Verfahrens anders abstrahiert würde,
als bisher geschehen ist,
so würden sich jene Prinzipien und die Bemühung mit denselben
auch als entbehrlich zeigen,
wie sie an ihnen selbst sich als etwas Schiefes
und im Widerspruche Bleibendes ausweisen.

Wenn wir diesem Eigentümlichen durch einfaches Aufnehmen
des in diesem Teile der Mathematik Vorhandenen nachforschen,
so finden wir als Gegenstand
a) Gleichungen, in welchen eine beliebige Anzahl von Größen
(wir können hier überhaupt bei zwei stehenbleiben)
zu einem Ganzen der Bestimmtheit so verbunden sind,
daß diese erstens ihre Bestimmtheit in empirischen Größen als festen Grenzen
und dann in der Art der Verbindung mit denselben
sowie ihrer Verbindung untereinander haben,
wie dies überhaupt in einer Gleichung der Fall ist;
indem aber nur eine Gleichung für beide Größen
(und ebenso relativ wohl mehrere Gleichungen für mehrere Größen,
aber immer weniger, als die Anzahl der Größen ist)
vorhanden ist, gehören diese Gleichungen zu den unbestimmten,
- und daß zweitens eine Seite,
wie diese Größen hier ihre Bestimmtheit haben, darin liegt,
daß sie (wenigstens eine derselben) in einer höheren
als die erste Potenz in der Gleichung vorhanden sind.

Hierüber sind zunächst einige Bemerkungen zu machen;
fürs erste, daß die Größen nach der ersten der angegebenen Bestimmungen
ganz nur den Charakter solcher veränderlichen Größen haben,
wie sie in den Aufgaben der unbestimmten Analysis vorkommen.

Ihr Wert ist unbestimmt, aber so, daß,
wenn anderswoher ein vollkommen bestimmter Wert, d. i. ein Zahlenwert
für die eine kommt, auch die andere bestimmt,

so die eine eine Funktion der anderen ist.

Die Kategorien von veränderlichen Größen, Funktionen u. dgl.
sind darum für die spezifische Größenbestimmtheit,
die ((326)) hier in Rede steht, nur formell, wie vorhin gesagt worden ist,
weil sie von einer Allgemeinheit sind, in welcher dasjenige Spezifische,
worauf das ganze Interesse des Differentialkalküls geht,
noch nicht enthalten ist, noch daraus durch Analyse expliziert werden kann;
sie sind für sich einfache, unbedeutende, leichte Bestimmungen,
die nur erst schwierig gemacht werden,
insofern das in sie gelegt werden soll,
damit es dann aus ihnen abgeleitet werden könne, was nicht in ihnen liegt,
nämlich die spezifische Bestimmung der Differentialrechnung.

- Was alsdann die sogenannte Konstante betrifft,
so kann über sie bemerkt werden,
daß sie zunächst als eine gleichgültige empirische größe ist,
bestimmend für die veränderlichen Größen
bloß in Ansehung ihres empirischen Quantums,
als Grenze ihres Minimums und Maximums;
die Art der Verbindung aber der Konstanten mit den veränderlichen Größen
ist selbst eines der Momente für die Natur der besonderen Funktion,
welche diese Größen sind.

Umgekehrt sind aber auch die Konstanten selbst Funktionen;
insofern z. B. eine gerade Linie den Sinn hat,
Parameter einer Parabel zu sein, so ist dieser ihr Sinn dies,
daß sie die Funktion y^2/x ist;
wie in der Entwicklung des Binomiums überhaupt die Konstante,
welche der Koeffizient des ersten Entwicklungsgliedes ist,
die Summe der Wurzeln,
der des zweiten die Summe der Produkte derselben zu Zwei und Zwei usf.,
also diese Konstanten hier überhaupt Funktionen der Wurzeln sind;
wo in der Integralrechnung die Konstante
aus der gegebenen Formel bestimmt wird,
wird sie insofern als eine Funktion von dieser behandelt.

Jene Koeffizienten werden wir dann weiter
in einer anderen Bestimmung als Funktionen betrachten,
deren Bedeutung im Konkreten es ist, worauf das ganze Interesse geht.

Das Eigentümliche nun aber,
wodurch die Betrachtung der veränderlichen Größen
sich in der Differentialrechnung von ihrer Beschaffenheit
in den unbestimmten Aufgaben unterscheidet,
ist in das Angegebene zu setzen,
daß wenigstens eine jener Größen oder auch alle
sich in einer höheren Potenz ((327)) als die erste befinde,
wobei wieder gleichgültig ist,
ob sämtliche von derselben höheren oder von ungleichen Potenzen sind;
ihre spezifische Unbestimmtheit, die sie hier haben, liegt allein darin,
daß sie in solchem Potenzenverhältnisse Funktionen voneinander sind.

Dadurch ist die Veränderung der veränderlichen Größen
qualitativ determiniert,
damit kontinuierlich, und diese Kontinuität,
die für sich wieder nur die formelle Kategorie überhaupt einer Identität,
einer sich in der Veränderung erhaltenden,
gleichbleibenden Bestimmtheit ist,
hat hier ihren determinierten Sinn,
und zwar allein in dem Potenzenverhältnisse,
als welches kein Quantum zu seinem Exponenten hat
und die nicht quantitative, bleibende Bestimmtheit
des Verhältnisses der veränderlichen Größen ausmacht.

Daher ist gegen einen anderen Formalismus die Bemerkung zu machen,
daß die erste Potenz nur Potenz im Verhältnis zu höheren ist;
für sich ist x nur irgendein unbestimmtes Quantum.

So hat es keinen Sinn,
für sich die Gleichungen $y = ax + b$, [die] der geraden Linie,
oder $s = ct$, die der schlecht gleichförmigen Geschwindigkeit, zu differentiieren;
wenn aus $y = ax$, oder auch aus $y = ax + b$, $a = dy/dx$,
oder $ds/dt = c$ aus $s = ct$ wird,
so ist ebensosehr $a = y/x$ die Bestimmung der Tangente
oder $s/t = c$ die der schlechten Geschwindigkeit.

Letztere wird als dy/dx exponiert im Zusammenhang dessen,
was für die Entwicklung der gleichförmig beschleunigten Bewegung

ausgegeben wird;
aber daß ein Moment von einfacher, schlecht gleichförmiger,
d. i. nicht durch die höhere Potenz
eines der Momente der Bewegung bestimmter Geschwindigkeit
im Systeme solcher Bewegung vorkomme,
ist, wie früher bemerkt, selbst eine leere,
allein in der Routine der Methode gegründete Annahme.

Indem die Methode von der Vorstellung des Zuwachses,
den die veränderliche größe erleiden solle, ausgeht,
so kann freilich auch eine solche,
die nur eine Funktion von erster Potenz ist, auch einen Zuwachs erleiden;
wenn nun hierauf, um das Differential zu finden,
der Unterschied der hierdurch entstandenen zweiten Gleichung
von der gegebenen ((328)) genommen werden soll,
so zeigt sich das Leere der Operation,
daß, wie bemerkt, die Gleichung vor und nach derselben
für die sogenannten Zuwächse
dieselbe ist als für die veränderlichen Größen selbst.

ß) Durch das Gesagte ist die Natur der zu behandelnden Gleichung bestimmt,
und es ist nun anzugeben,
auf welches Interesse sich die Behandlung derselben gerichtet findet.

Diese Betrachtung kann nur bekannte Resultate,
wie sie der Form nach in der Lagrangeschen Auffassung
insbesondere vorhanden sind, geben;
aber ich habe die Exposition so ganz elementarisch angestellt,
um die damit vermischten heterogenen Bestimmungen zu entfernen.

- Als die Grundlage der Behandlung der Gleichung von angegebener Art
zeigt sich, daß die Potenz innerhalb ihrer selbst als ein Verhältnis,
als ein System von Verhältnisbestimmungen gefaßt wird.

Die Potenz ist oben als die Zahl angegeben worden,
insofern sie dazu gekommen ist,
daß ihre Veränderung durch sie selbst bestimmt,
ihre Momente, Einheit und Anzahl identisch sind, wie früher nachgewiesen,
- vollkommen zunächst im Quadrat,

formeller, was hier keinen Unterschied macht, in den höheren Potenzen.

Die Potenz nun, da sie als Zahl
- wenn man den Ausdruck größe als den allgemeineren vorzieht,
so ist sie an sich immer die Zahl -
eine Menge ist, auch als Summe dargestellt,
kann zunächst innerhalb ihrer
in eine beliebige Menge von Zahlen zerlegt werden,
die ohne alle weitere Bestimmung gegeneinander
und gegen ihre Summe sind
als nur, daß sie zusammen dieser gleich sind.

Aber die Potenz kann auch in eine Summe
von solchen Unterschieden diszerniert werden,
die durch die Form der Potenz bestimmt sind.

Wird die Potenz als Summe genommen,
so ist auch die Grundzahl derselben, die Wurzel, als Summe gefaßt
und beliebig nach mannigfaltiger Zerlegung,
welche Mannigfaltigkeit aber das gleichgültige empirische Quantitative ist.

Die Summe, als welche die Wurzel sein soll,
auf ihre einfache Bestimmtheit,
d. i. ihre wahrhafte Allgemeinheit zurückgeführt,
ist das Binomium;
alle weitere Vermehrung der Glieder ((329))
ist eine bloße Wiederholung derselben Bestimmung und daher etwas Leeres. °

° Fuß
Es gehört nur zum Formalismus derjenigen Allgemeinheit,
auf welche die Analysis notwendigen Anspruch macht,
wenn, statt (a + b)@ [? Potenz] für die Potenzenentwicklung zu nehmen,
(a + b + c + d..)@ [?] gesagt wird,
wie dies auch in vielen anderen Fällen getan wird;
es ist solche Form sozusagen nur
für eine Koketterie des Scheins der Allgemeinheit zu halten;
in dem Binomium ist die Sache erschöpft;
es wird durch dessen Entwicklung das Gesetz gefunden,
und das Gesetz ist die wahrhafte Allgemeinheit,
nicht die äußerliche nur leere Wiederholung des Gesetzes,

welche allein es ist, die durch jenes a + b + c + d.. hervorgebracht wird.
EndeFuß

Worauf es ankommt, ist allein die hiermit qualitative Bestimmtheit der Glieder,
welche sich durch die Potenzierung
der als Summe angenommenen Wurzel ergibt,
welche Bestimmtheit allein in der Veränderung, die das Potenzieren ist, liegt.

Diese Glieder sind somit ganz Funktionen der Potenzierung und der Potenz.

Jene Darstellung nun der Zahl, als Summe einer Menge von solchen Gliedern,
welche Funktionen der Potenzierung sind,
alsdann das Interesse, die Form solcher Funktionen
und ferner diese Summe aus der Menge solcher Glieder zu finden,
insofern dieses Finden allein von jener Form abhängen muss,
- dies macht bekanntlich die besondere Lehre von den Reihen aus.

Aber hierbei haben wir wesentlich das fernere Interesse zu unterscheiden,
nämlich das Verhältnis der zugrunde liegenden größe selbst
- deren Bestimmtheit, insofern sie ein Komplex,
d. i. hier eine Gleichung ist, eine Potenz in sich schließt -
zu den Funktionen ihrer Potenzierung.

Dies Verhältnis, ganz abstrahiert
von dem vorhin genannten Interesse der Summe,
wird sich als der Gesichtspunkt zeigen,
der sich als der einzige, den die Differentialrechnung sich vorsetzt,
aus der wirklichen Wissenschaft ergibt.

Es ist jedoch vorher noch eine Bestimmung zu dem Gesagten hinzuzufügen
oder vielmehr eine, die darin liegt, zu entfernen.

Es wurde nämlich gesagt, daß die veränderliche größe,
in deren Bestimmung die Potenz eintritt, angesehen werde
innerhalb ihrer selbst als Summe, und zwar als ein System von Gliedern,
insofern diese Funktionen der Potenzierung sind,
womit auch die Wurzel als eine Summe
und in ((330)) der einfach bestimmten Form als Binomium betrachtet werde;
x@ = (y + z)@ = (y + ny@ z + ..).

Diese Darstellung ging für die Entwicklung der Potenz,
d. i. für das Erlangen ihrer Potenzierungsfunktionen,
von der Summe als solcher aus;
es ist jedoch hier nicht um eine Summe als solche
noch um die daraus entspringende Reihe zu tun,
sondern von der Summe ist nur die Beziehung aufzunehmen.

Die Beziehung als solche der Größen ist das, was einerseits übrigbleibt,
nachdem von dem plus einer Summe als solcher abstrahiert wird,
und was andererseits für das Finden der Entwicklungsfunktionen der Potenz
erforderlich ist.

Solche Beziehung aber ist schon darin bestimmt,
daß hier der Gegenstand eine Gleichung, @ = ax@ auch schon
ein Komplex von mehreren (veränderlichen) Größen ist,
der eine Potenzenbestimmung derselben enthält.

In diesem Komplex ist jede dieser Größen
schlechthin als in der Beziehung auf die andere
mit der Bedeutung, könnte man sagen, eines plus an ihr selbst,
- als Funktion der anderen Größen gesetzt;
ihr Charakter, Funktionen voneinander zu sein,
gibt ihnen diese Bestimmung des plus,
eben damit aber eines ganz unbestimmten,
nicht eines Zuwachses, Inkrements u. dgl.

Doch diesen abstrakten Gesichtspunkt konnten wir auch auf der Seite lassen;
es kann ganz einfach dabei stehengeblieben werden,
daß, nachdem die veränderlichen Größen in der Gleichung
als Funktionen voneinander,
so daß diese Bestimmtheit ein Verhältnis von Potenzen enthält,
gegeben sind,
nun auch die Funktionen der Potenzierung einer jeden miteinander
verglichen werden,
- welche zweiten Funktionen durch gar nichts anderes weiter
als durch die Potenzierung selbst bestimmt sind.

Es kann zunächst für ein Belieben oder eine Möglichkeit ausgegeben werden,
eine Gleichung von den Potenzen ihrer veränderlichen Größen

auf ein Verhältnis ihrer Entwicklungsfunktionen zu setzen;
ein weiterer Zweck, Nutzen, Gebrauch
hat erst das Dienliche solcher Umgestaltung davon anzugeben;
durch ihre Nützlichkeit allein ist jene Umstellung veranlaßt worden.

Wenn ((331)) vorhin von der Darstellung
dieser Potenzierungsbestimmungen an einer größe,
die als Summe in sich different genommen werde, ausgegangen worden,
so diente dies nur teils zur Angabe, von welcher Art solche Funktionen seien,
teils liegt darin die Weise, sie zu finden.

Wir befinden uns hiermit bei der gewöhnlichen analytischen Entwicklung,
die für den Zweck der Differentialrechnung so gefaßt wird,
daß der veränderlichen größe ein Zuwachs, dx, i gegeben
und nun die Potenz des Binomiums
durch die Gliederreihe, die ihm angehört, expliziert wird.

Der sogenannte Zuwachs aber soll nicht ein Quantum, nur eine Form sein,
deren ganzer Wert ist, zur Entwicklung behilflich zu sein;
was man eingestandenermaßen, am bestimmtesten von Euler und Lagrange,
und in der früher erwähnten Vorstellung der Grenze will,
sind nur die sich ergebenden Potenzenbestimmungen
der veränderlichen Größen,
die sogenannten Koeffizienten zwar des Zuwachses
und der Potenzen desselben, nach denen die Reihe sich ordnet
und zu denen die unterschiedenen Koeffizienten gehören.

Es kann hierzu etwa bemerkt werden,
daß, indem nur um der Entwicklung willen
ein Zuwachs angenommen ist, der ohne Quantum sei,
es am geschicktesten gewesen wäre, 1 (das Eins) dafür zu nehmen,
indem derselbe in der Entwicklung immer nur als Faktor vorkommt,
womit eben der Faktor Eins den Zweck erfüllt,
daß keine quantitative Bestimmtheit und Veränderung
durch den Zuwachs gesetzt werden solle;
dagegen dx mit der falschen Vorstellung von einer quantitativen Differenz
und andere Zeichen, wie i,
mit dem hier unnützen Scheine von Allgemeinheit behaftet,
immer das Aussehen und die Prätention von einem Quantum

und dessen Potenzen haben;
welche Prätention dann die Mühe herbeibringt,
sie dessenungeachtet wegzubringen und wegzulassen.

Um die Form einer nach Potenzen entwickelten Reihe zu behalten,
könnten die Exponentenbezeichnungen als indices
ebensogut dem Eins angefügt werden.

Aber es muss ohnehin von der Reihe
und von der Bestimmung der Koeffizienten
nach der Stelle, die sie in ((332)) der Reihe haben, abstrahiert werden;
das Verhältnis zwischen allen ist dasselbe;
die zweite Funktion wird ganz ebenso aus der ersten
als diese aus der ursprünglichen abgeleitet,
und für die als die zweite gezählte
ist die erste abgeleitete wieder ursprüngliche Funktion.

Wesentlich aber geht das Interesse nicht auf die Reihe,
sondern ganz allein
auf die sich aus der Entwicklung ergebende Potenzenbestimmung
in ihrem Verhältnis zu der für sie unmittelbaren größe.

Anstatt also jene
als den Koeffizienten des ersten Gliedes der Entwicklung zu bestimmen,
da ein Glied als das erste
in Beziehung auf die anderen in der Reihe folgenden bezeichnet wird,
eine solche Potenz als eines Zuwachses aber
wie die Reihe selbst hierher nicht gehören,
wäre der bloße Ausdruck abgeleitete Potenzenfunktion
oder, wie vorhin gesagt wurde,
eine Funktion des Potenzierens der größe vorzuziehen,
wobei als bekannt vorausgesetzt wird,
auf welche Weise die Ableitung
als innerhalb einer Potenz eingeschlossene Entwicklung genommen wird.

Wenn nun der eigentliche mathematische Anfang
in diesem Teile der Analytik nichts weiter ist
als das Finden der durch die Potenzenentwicklung bestimmten Funktion,
so ist die weitere Frage, was mit dem damit erhaltenen Verhältnisse

anzufangen ist, wo es eine Anwendung und Gebrauch hat,
oder, in der Tat, für welchen Zweck solche Funktionen gesucht werden.

Durch das Finden von Verhältnissen an konkreten Gegenständen,
welche sich auf jene abstrakten analytischen zurückführen lassen,
hat die Differentialrechnung ihr großes Interesse erhalten.

Über die Anwendbarkeit aber ergibt sich zunächst aus der Natur der Sache,
ohne noch aus den Fällen der Anwendung selbst zu schließen,
vermöge der aufgezeigten Gestalt der Potenzenmomente von selbst folgendes.

Die Entwicklung der Potenzengrößen,
wodurch sich die Funktionen ihrer Potenzierung ergeben,
enthält, von näherer Bestimmung abstrahiert,
zunächst überhaupt die Herabsetzung der größe
auf die nächst niedrigere Potenz.

Die Anwendbarkeit dieser Operation
findet also bei solchen Gegenständen statt,
bei welchen gleichfalls ein solcher Unterschied von Potenzenbestimmungen
vorhanden ist.

Wenn wir nun auf die Raumbestimmtheit reflektieren,
so finden wir, daß sie die drei Dimensionen enthält,
die wir, um sie von den abstrakten Unterschieden
der Höhe, Länge und Breite zu unterscheiden,
als die konkreten bezeichnen können,
nämlich die Linie, die Fläche und den totalen Raum;
und indem sie in ihren einfachsten Formen
und in Beziehung auf Selbstbestimmung
und damit auf analytische Dimensionen genommen werden,
haben wir die gerade Linie, die ebene Fläche
und dieselbe als Quadrat, und den Kubus.

Die gerade Linie hat ein empirisches Quantum,
aber mit der Ebene tritt das Qualitative, die Potenzenbestimmung ein;
nähere Modifikationen,
z. B. daß dies gleich auch mit den ebenen Kurven geschieht,
können wir, insofern es zunächst um den Unterschied

bloß im allgemeinen zu tun ist, unerörtert lassen.

Hiermit entsteht auch das Bedürfnis, von einer höheren Potenzenbestimmung
zu einer niedrigeren und umgekehrt überzugehen,
indem z. B. lineare Bestimmungen
aus gegebenen Gleichungen der Fläche usf.
oder umgekehrt abgeleitet werden sollen.

- Die Bewegung ferner,
als an der das Größenverhältnis des durchlaufenen Raumes
und der dazugehörigen verflossenen Zeit zu betrachten ist,
zeigt sich in den verschiedenen Bestimmungen
einer schlecht-gleichförmigen, einer gleichförmig beschleunigten,
einer abwechselnd gleichförmig beschleunigten
und gleichförmig retardierten, in sich zurückkehrenden Bewegung;
indem diese unterschiedenen Arten der Bewegung
nach dem Größenverhältnisse ihrer Momente, des Raums und der Zeit,
ausgedrückt werden,
ergeben sich für sie Gleichungen
aus unterschiedenen Potenzenbestimmungen,
und insofern es Bedürfnis sein kann,
eine Art der Bewegung oder auch der Raumgrößen,
an welche eine Art gebunden ist,
aus einer anderen Art derselben zu bestimmen,
führt die Operation gleichfalls das Übergehen
von einer Potenzenfunktion zu einer höheren oder niedrigeren herbei.

- Die Beispiele dieser ((334)) zwei Gegenstände
mögen für den Zweck, zu dem sie angeführt sind, genügen.

Der Anschein von Zufälligkeit,
welchen die Differentialrechnung in ihren Anwendungen präsentiert,
würde schon vereinfacht werden
durch das Bewußtsein über die Natur der Gebiete,
in welchem die Anwendung stattfinden kann,
und über das eigentümliche Bedürfnis und die Bedingung dieser Anwendung.

Nun aber kommt es weiter innerhalb dieser Gebiete selbst darauf an zu wissen,
zwischen welchen Teilen der Gegenstände der mathematischen Aufgabe

ein solches Verhältnis stattfinde,
als durch den Differentialkalkül eigentümlich gesetzt wird.

Es muss gleich vorläufig bemerkt werden,
daß hierbei zweierlei Verhältnisse zu beachten sind.

Die Operation des Depotenzierens einer Gleichung,
sie nach den abgeleiteten Funktionen ihrer veränderlichen Größen betrachtet,
gibt ein Resultat, welches an ihm selbst
wahrhaft nicht mehr eine Gleichung, sondern ein Verhältnis ist;
dieses Verhältnis ist der Gegenstand der eigentlichen Differentialrechnung.

Eben damit auch ist zweitens das Verhältnis vorhanden
von der höheren Potenzenbestimmung (der ursprünglichen Gleichung) selbst
zu der niedrigeren (dem Abgeleiteten).

Dies zweite Verhältnis haben wir hier zunächst beiseite zu lassen;
es wird sich als der eigentümliche Gegenstand der Integralrechnung zeigen.

Betrachten wir zunächst das erste Verhältnis und nehmen zu der
aus der sogenannten Anwendung zu entnehmenden
Bestimmung des Moments, worin das Interesse der Operation liegt,
das einfachste Beispiel an den Kurven vor,
die durch eine Gleichung der zweiten Potenz bestimmt sind.

Bekanntlich ist unmittelbar durch die Gleichung
das Verhältnis der Koordinaten gegeben in einer Potenzenbestimmung.

Folgen von der Grundbestimmung sind die Bestimmungen
der mit den Koordinaten zusammenhängenden anderen geraden Linien,
der Tangente, Subtangente, Normale usf.

Die Gleichungen aber zwischen diesen Linien und den Koordinaten
sind lineare Gleichungen;
die Ganzen, als deren Teile diese ((335)) Linien bestimmt sind,
sind rechtwinklige Dreiecke von geraden Linien.

Der Übergang von der Grundgleichung,
welche die Potenzenbestimmung enthält,

zu jenen linearen Gleichungen enthält nun den angegebenen Übergang
von der ursprünglichen Funktion, d. i. welche eine Gleichung ist,
zu der abgeleiteten, welche ein Verhältnis ist,
und zwar zwischen gewissen in der Kurve enthaltenen Linien.

Der Zusammenhang zwischen dem Verhältnisse
dieser Linien und der Gleichung der Kurve ist es,
um dessen Finden es sich handelt.

Es ist nicht ohne Interesse,
von dem Historischen hierüber so viel zu bemerken,
daß die ersten Entdecker ihren Fund
nur auf eine ganz empirische Weise anzugeben wissen,
ohne eine Rechenschaft
von der völlig äußerlich gebliebenen Operation geben zu können.

Ich begnüge mich hierüber mit der Anführung Barrows, des Lehrers Newtons.

In seinen Lectiones opticae et geometricae °,
worin er Probleme der höheren Geometrie
nach der Methode der Unteilbaren behandelt,
die sich zunächst von dem Eigentümlichen
der Differentialrechnung unterscheidet,
gibt er auch, »weil seine Freunde in ihn gedrungen« (lect. X),
sein Verfahren, die Tangente zu bestimmen, an.

Man muss bei ihm selbst nachlesen, wie diese Aufgabe beschaffen ist,
um sich eine gehörige Vorstellung zu machen,
wie das Verfahren ganz als äußerliche Regel angegeben ist,
- in demselben Stile,
wie vormals in den arithmetischen Schulbüchern die Regeldetri
oder noch besser die sogenannte Neunerprobe der Rechnungsarten
vorgetragen worden ist.

Er macht die Verzeichnung der Linienchen, die man nachher
die Inkremente im charakteristischen Dreieck einer Kurve genannt hat,
und gibt nun die Vorschrift, als eine bloße Regel,
die Glieder als überflüssig wegzuwerfen,
die in Folge der Entwicklung der Gleichungen

als Potenzen jener Inkremente oder Produkte zum Vorschein kommen
(etenim isti termini nihilum valebunt);
ebenso seien ((336)) die Glieder,
die nur aus der ursprünglichen Gleichung bestimmte Größen enthalten,
wegzuwerfen (das nachherige Abziehen der ursprünglichen Gleichung
von der mit den Inkrementen gebildeten)
und zuletzt für das Inkrement der Ordinate die Ordinate selbst
und für das Inkrement der Abszisse die Subtangente zu substituieren.

Man kann, wenn es so zu reden erlaubt ist,
das Verfahren nicht schulmeistermäßiger angeben;
- die letztere Substitution ist die für die Tangentenbestimmung
in der gewöhnlichen Differentialmethode zur Grundlage gemachte Annahme
der Proportionalität der Inkremente der Ordinate und Abszisse
mit der Ordinate und Subtangente;
in Barrows Regel erscheint diese Annahme in ihrer ganz naiven Nacktheit.

Eine einfache Weise, die Subtangente zu bestimmen, war gefunden;
die Manieren Robervals ° und Fermats ° laufen auf Ähnliches hinaus,
- die Methode, die größten und kleinsten Werte zu finden,
von der der letztere ausging,
beruht auf denselben Grundlagen und demselben Verfahren.

Es war eine mathematische Sucht jener Zeiten,
sogenannte Methoden, d. i. Regeln jener Art zu finden,
dabei aus ihnen auch ein Geheimnis zu machen,
was nicht nur leicht, sondern selbst in einer Rücksicht nötig war,
aus demselben Grunde, als es leicht war,
- nämlich weil die Erfinder nur eine empirische äußerliche Regel,
keine Methode, d. i. nichts aus anerkannten Prinzipien Abgeleitetes,
gefunden hatten.

Solche sogenannten Methoden hat Leibniz von seiner Zeit
und Newton ebenfalls von derselben
und unmittelbar von seinem Lehrer aufgenommen;
sie haben durch die Verallgemeinerung ihrer Form und Anwendbarkeit
den Wissenschaften neue Bahnen gebrochen,
aber damit zugleich das Bedürfnis gehabt,
das Verfahren aus der Gestalt bloß äußerlicher Regeln zu reißen,
und demselben die erforderliche Berechtigung zu verschaffen gesucht.

Analysieren wir die Methode näher,
so ist der wahrhafte ((337)) Vorgang dieser.

Es werden erstlich die Potenzenbestimmungen
(versteht sich: der veränderlichen Größen), welche die Gleichung enthält,
auf ihre ersten Funktionen herabgesetzt.

Damit aber wird der Wert der Glieder der Gleichung verändert;
es bleibt daher keine Gleichung mehr, sondern es ist nur ein Verhältnis entstanden
zwischen der ersten Funktion der einen veränderlichen größe
zu der ersten Funktion der anderen;
statt $px = y^2$ hat man $p : 2y$, oder statt $2ax - x^2 = y^2$ hat man $a - x : y$,
was nachher als das Verhältnis dy/dx bezeichnet zu werden pflegte.

Die Gleichung ist Gleichung der Kurve;
dies Verhältnis, das ganz von derselben abhängig,
aus derselben (oben nach einer bloßen Regel) abgeleitet ist,
ist dagegen ein lineares, mit welchem gewisse Linien in Proportion sind;
$p : 2y$ oder $a - x : y$ sind selbst Verhältnisse aus geraden Linien der Kurve,
den Koordinaten und den Parametern;
aber damit weiß man noch nichts.

Das Interesse ist, von anderen an der Kurve vorkommenden Linien zu wissen,
daß ihnen jenes Verhältnis zukommt,
die Gleichheit zweier Verhältnisse zu finden.

- Es ist also zweitens die Frage,
welches die geraden, durch die Natur der Kurve bestimmten Linien sind,
welche in solchem Verhältnisse stehen.

- Dies aber ist es, was schon früher bekannt war,
daß nämlich solches auf jenem Wege erhaltene Verhältnis
das Verhältnis der Ordinate zur Subtangente ist.

Dies hatten die Alten auf sinnreichem geometrischen Wege gefunden;
was die neueren Erfinder entdeckt haben,
ist das empirische Verfahren, die Gleichung der Kurve so zuzurichten,
daß jenes erste Verhältnis geliefert wird, von dem bereits bekannt war,

daß es einem Verhältnisse gleich ist, welches die Linie enthält,
hier die Subtangente, um deren Bestimmung es zu tun ist.

Teils ist nun jene Zurichtung der Gleichung
methodisch gefaßt und gemacht worden - die Differentiation -,
teils aber sind die imaginären Inkremente der Koordinaten
und das imaginäre, hieraus
und [aus] einem ebensolchen Inkremente der Tangente
gebildete charakteristische Dreieck erfunden worden,
damit die Proportionalität ((338))
des durch die Depotenzierung der Gleichung gefundenen Verhältnisses
mit dem Verhältnisse der Ordinate und der Subtangente
nicht als etwas empirisch nur aus der alten Bekanntschaft Aufgenommenes,
sondern als ein Erwiesenes dargestellt werde.

Die alte Bekanntschaft jedoch
erweist sich überhaupt und am unverkennbarsten
in der angeführten Form von Regeln
als die einzige Veranlassung und respektive Berechtigung
der Annahme des charakteristischen Dreiecks und jener Proportionalität.

Lagrange hat nun diese Simulation verworfen
und den echt wissenschaftlichen Weg eingeschlagen;
seiner Methode ist die Einsicht zu verdanken, worauf es ankommt,
indem sie darin besteht, die beiden Übergänge,
die für die Auflösung der Aufgabe zu machen sind, zu trennen
und jede dieser Seiten für sich zu behandeln und zu erweisen.

Der eine Teil dieser Auflösung
- indem wir für die nähere Angabe des Ganges
bei dem Beispiele der elementarischen Aufgabe,
die Subtangente zu finden, bleiben -,
der theoretische oder allgemeine Teil,
nämlich das Finden der ersten Funktion
aus der gegebenen Kurvenvergleichung,
wird für sich reguliert;
derselbe gibt ein lineares Verhältnis, also von geraden Linien,
die in dem Systeme der Kurvenbestimmung vorkommen.

Der andere Teil der Auflösung
ist nun die Findung derjenigen Linien an der Kurve,
welche in jenem Verhältnisse stehen.

Dies wird nun auf die direkte Weise
(Theorie des fonctions analytiques, II. P., II. Chap.)
bewerkstelligt, d. i. ohne das charakteristische Dreieck,
nämlich ohne unendlichkleine Bogen, Ordinaten und Abszissen anzunehmen
und diesen die Bestimmungen von dy und dx,
d. i. von den Seiten jenes Verhältnisses
und zugleich unmittelbar die Bedeutung der Gleichheit desselben
mit der Ordinate und Subtangente selbst zu geben.

Eine Linie (wie auch ein Punkt) hat allein ihre Bestimmung,
insofern sie die Seite eines Dreiecks ausmacht,
wie auch die Bestimmung eines Punkts nur in einem solchen liegt.

Dies ist, um es im Vorbeigehen zu erwähnen,
der Fundamentalsatz der analytischen Geometrie, ((339))
welcher die Koordinaten wie, was dasselbe ist,
in der Mechanik das Parallelogramm der Kräfte herbeiführt,
das eben darum der vielen Bemühung um einen Beweis
ganz unbedürftig ist.

- Die Subtangente wird nun als die Seite eines Dreiecks gesetzt,
dessen weitere Seiten die Ordinate
und die darauf sich beziehende Tangente ist.

Letztere hat als gerade Linie zu ihrer Gleichung p = aq
(+ b hinzuzufügen ist für die Bestimmung unnütz
und wird nur um der beliebten Allgemeinheit [willen] hinzugesetzt);
die Determination des Verhältnisses p fällt in a, den Koeffizienten von q,
der die respektive erste Funktion der Gleichung ist,
überhaupt aber nur als a = p/q betrachtet zu werden braucht
als, wie gesagt, die wesentliche Determination der geraden Linie,
die als Tangente an die Kurve appliziert ist.

Indem nun ferner die erste Funktion der Kurvengleichung genommen wird,
ist sie ebenso die Determination einer geraden Linie;
indem ferner die eine Koordinate p der ersten geraden Linie

und y, die Ordinate der Kurve, als dieselben genommen werden,
daß also der Punkt,
in welchem jene als Tangente angenommene erste Gerade die Kurve berührt,
gleichfalls der Anfangspunkt
der durch die erste Funktion der Kurve bestimmten geraden Linie ist,
so kommt es darauf an zu zeigen,
daß diese zweite gerade Linie mit der ersten zusammenfällt,
d. h. Tangente ist;
algebraisch ausgedrückt, daß, indem y = fx und p = Fq ist
und nun y = p, also fx = Fq angenommen wird, auch f 'x = F 'q.

Daß nun die als Tangente applizierte Gerade und jene aus der Gleichung
durch deren erste Funktion determinierte gerade Linie zusammenfallen,
daß die letztere also Tangente ist,
dies wird mit Zuhilfenahme des Inkrements i der Abszisse
und des durch die Entwicklung der Funktion bestimmten Inkrements
der Ordinate gezeigt.

Hier kommt denn also gleichfalls das berüchtigte Inkrement herein;
aber wie es zu dem soeben angegebenen Behufe eingeführt wird,
und die Entwicklung der Funktion nach demselben,
muss von dem früher erwähnten Gebrauch des Inkrements
für das Finden der Differentialgleichung
und für das charakteristische ((340)) Dreieck wohl unterschieden werden.

Der hier gemachte Gebrauch ist berechtigt und notwendig;
er fällt in den Umkreis der Geometrie,
indem es zur geometrischen Bestimmung einer Tangente als solcher gehört,
daß zwischen ihr und der Kurve,
mit der sie einen Punkt gemeinschaftlich hat,
keine andere gerade Linie, die gleichfalls in diesen Punkt fiele,
durchgehen könne.

Denn mit dieser Bestimmung ist die Qualität der Tangente oder Nicht-Tangente
auf den Größenunterschied zurückgeführt,
und diejenige Linie ist die Tangente, auf welche die größere Kleinheit
schlechthin in Ansehung der Determination, auf welche es ankommt, falle.

Diese scheinbar nur relative Kleinheit enthält durchaus nichts Empirisches,
d. i. von einem Quantum als solchem Abhängiges;

sie ist qualitativ durch die Natur der Formel gesetzt,
wenn der Unterschied des Moments,
von dem die zu vergleichende größe abhängt, ein Potenzenunterschied ist;
indem derselbe auf i und i² hinauskommt
und i, das zuletzt doch eine Zahl bedeuten soll,
dann als ein Bruch vorzustellen ist,
so ist i² an und für sich kleiner als i,
so daß selbst die Vorstellung von einer beliebigen größe,
in der man i nehmen könne, hier überflüssig
und sogar nicht an ihrem Orte ist.

Eben damit hat der Erweis der größeren Kleinheit
nichts mit einem Unendlichkleinen zu tun,
das hiermit hier keineswegs hereinzukommen hat.

Wäre es auch nur um der Schönheit
und des heutigentags mehr vergessenen, aber wohlverdienten Ruhmes willen,
daß ich noch Descartes Tangentenmethode anführen will;
sie hat übrigens auch eine Beziehung auf die Natur der Gleichungen,
über welche dann noch eine fernere Bemerkung zu machen ist.

Descartes trägt diese selbständige Methode,
worin die geforderte lineare Bestimmung gleichfalls
aus derselben abgeleiteten Funktion gefunden wird,
in seiner, sonst auch so fruchtbar gewordenen Geometrie vor,
(liv. II, p. 357 sq., Oeuvres compl., ed. Cousin [11 Bde., Paris1824ff.], Tom. V)
indem er in derselben die große Grundlage von der Natur der Gleichungen
und deren geometrischer Konstruktion ((341))
und der damit so sehr erweiterten Analysis auf die Geometrie überhaupt
gelehrt hat.

Das Problem hat bei ihm die Form der Aufgabe,
gerade Linien senkrecht auf beliebige Orte einer Kurve zu ziehen,
als wodurch Subtangente usf. bestimmt wird;
man begreift die Befriedigung, die er daselbst über seine Entdeckung,
die einen Gegenstand von allgemeinem wissenschaftlichen Interesse
der damaligen Zeit betraf und die so sehr geometrisch ist
und dadurch so hoch über den oben erwähnten bloßen Regelmethoden
seiner Nebenbuhler stand, ausdrückt:

» j’ose dire que c’est ceci le problème le plus utile et le plus général,
non seulement que je sache,
mais même que j’ai jamais désiré de savoir en géometrie.«
Übers.: “Ich wage zu behaupten,
daß dieses das fruchtbarste und allgemeinste Problem ist, das ich kenne,
ja das ich jemals in der Geometrie zu erkennen gewünscht habe.”

- Er legt für die Auflösung
die analytische Gleichung des rechtwinkligen Dreiecks zugrunde,
das durch die Ordinate des Punkts der Kurve,
auf welchem die im Probleme verlangte gerade Linie senkrecht sein soll,
dann durch diese selbst, die Normale,
und drittens durch den Teil der Achse,
der durch die Ordinate und Normale abgeschnitten wird,
durch die Subnormale, gebildet wird.

Aus der bekannten Gleichung einer Kurve
wird nun in jene Gleichung des Dreiecks der Wert,
es sei der Ordinate oder der Abszisse, substituiert,
so hat man eine Gleichung des zweiten Grades
(und Descartes zeigt, wie auch Kurven,
deren Gleichungen höhere Grade enthalten, sich hierauf zurückführen),
in welcher nur noch die eine der veränderlichen Größen,
und zwar im Quadrat und in der ersten Potenz vorkommt;
- eine quadratische Gleichung,
welche zunächst als eine sogenannte unreine erscheint.

Nun macht Descartes die Reflexion, daß,
wenn der auf der Kurve angenommene Punkt
als Durchschnittspunkt derselben und eines Kreises vorgestellt wird,
dieser Kreis die Kurve noch in einem anderen Punkte schneiden wird
und alsdann sich für die zwei damit entstehenden ((342))
und ungleichen x
zwei Gleichungen mit denselben Konstanten und von derselben Form ergeben,
- oder aber nur eine Gleichung mit ungleichen Werten von x.

Die Gleichung wird aber nur eine, für das eine Dreieck,
in welchem die Hypotenuse auf die Kurve senkrecht, Normale, ist,
was so vorgestellt wird, daß man die beiden Durchschnittspunkte der Kurve
durch den Kreis zusammenfallen, diesen also die Kurve berühren lasse.

Damit aber fällt auch der Umstand der ungleichen Wurzeln
des x oder y der quadratischen Gleichung hinweg.

Bei einer quadratischen Gleichung von zwei gleichen Wurzeln nun aber
ist der Koeffizient des Gliedes,
das die Unbekannte in der ersten Potenz enthält,
das Doppelte der nur einen Wurzel;
dies nun gibt eine Gleichung,
durch welche die verlangten Bestimmungen gefunden sind.

Dieser Gang ist für den genialen Griff eines echt analytischen Kopfes anzusehen,
wogegen die ganz assertorisch angenommene Proportionalität
der Subtangente und der Ordinate
mit den unendlich klein sein sollenden sogenannten Inkrementen
der Abszisse und der Ordinate ganz zurücksteht.

Die auf die angegebene Weise erhaltene Endgleichung,
welche den Koeffizienten des zweiten Gliedes der quadratischen Gleichung
gleichsetzt der doppelten Wurzel oder Unbekannten, ist dieselbe,
welche durch das Verfahren des Differentialkalküls gefunden wird.

$x2 - ax - b = 0$ differentiiert, gibt die neue Gleichung $2x - a = 0$;
oder $x3 - px - q = 0$ gibt $3x^2 - p = 0$.

Es bietet sich hierbei aber die Bemerkung an,
daß es sich keineswegs von selbst versteht,
daß solche abgeleitete Gleichung auch richtig ist.

Bei einer Gleichung mit zwei veränderlichen Größen,
die darum, daß sie veränderliche sind,
den Charakter, unbekannte Größen zu sein, nicht verlieren,
kommt, wie oben betrachtet wurde, nur ein Verhältnis heraus,
aus dem angegebenen einfachen Grunde,
weil durch das Substituieren der Funktionen der Potenzierung
an die Stelle der Potenzen selbst der Wert der beiden Glieder der Gleichung
verändert wird und es für sich selbst ((343)) noch unbekannt ist,
ob auch zwischen ihnen bei so veränderten Werten
noch eine Gleichung stattfinde.

Die Gleichung dy/dx = P drückt gar nichts weiter aus,
als daß P ein Verhältnis ist,
und es ist dem dy/dx sonst kein reeller Sinn zuzuschreiben.

Von diesem Verhältnis = P ist es aber ebenso noch unbekannt,
welchem anderen Verhältnisse es gleich sei;
solche Gleichung, die Proportionalität,
gibt demselben erst einen Wert und Bedeutung.

- Wie angegeben wurde, daß man diese Bedeutung,
was die Anwendung hieß, anderswoher, empirisch aufnahm,
so muss bei den hier in Rede stehenden,
durch Differentiation abgeleiteten Gleichungen anderswoher gewußt werden,
ob sie gleiche Wurzeln haben,
um zu wissen, ob die erhaltene Gleichung noch richtig sei.

Dieser Umstand wird aber in den Lehrbüchern
nicht ausdrücklich bemerklich gemacht;
er wird wohl dadurch beseitigt,
daß eine Gleichung mit einer Unbekannten, auf Null gebracht,
sogleich = y gesetzt wird,
wodurch dann bei der Differentiation allerdings ein dy/dx,
nur ein Verhältnis herauskommt.

Der Funktionenkalkül soll es allerdings mit Funktionen der Potenzierung
oder die Differentialrechnung mit Differentialien zu tun haben,
aber daraus folgt für sich noch keineswegs,
daß die Größen, deren Differentialien
oder Funktionen der Potenzierung genommen werden,
selbst auch nur Funktionen anderer Größen sein sollen.

In dem theoretischen Teile,
der Anweisung, die Differentiale, d. i. die Funktionen der Potenzierung abzuleiten,
wird ohnehin noch nicht daran gedacht, daß die Größen,
die vor solcher ° Ableitung zu behandeln gelehrt wird,
selbst Funktionen anderer Größen sein sollen.

Noch kann in Ansehung des Weglassens der Konstante

bei dem Differentiieren bemerklich gemacht werden,
daß dasselbe hier den Sinn hat,
daß die Konstante für die Bestimmung der Wurzeln
im Falle ihrer Gleichheit gleichgültig ist,
als welche Bestimmung
durch den Koeffizienten des zweiten Gliedes der Gleichung erschöpft ist.

Wie im angeführten Beispiele ((344)) von Descartes
die Konstante das Quadrat der Wurzeln selbst ist,
also diese aus der Konstante
ebenso wie aus den Koeffizienten bestimmt werden kann,
indem sie überhaupt, wie die Koeffizienten,
Funktion der Wurzeln der Gleichung ist.

In der gewöhnlichen Darstellung erfolgt das Wegfallen der sogenannten
nur durch + und - mit den übrigen Gliedern verbundenen Konstanten
durch den bloßen Mechanismus des Verfahrens,
daß, um das Differential eines zusammengesetzten Ausdrucks zu finden,
nur den veränderlichen Größen ein Zuwachs gegeben
und der hierdurch formierte Ausdruck
von dem ursprünglichen abgezogen wird.

Der Sinn der Konstanten und ihres Weglassens,
inwiefern sie selbst Funktionen sind
und nach dieser Bestimmung dienen oder nicht,
kommt nicht zur Sprache.

Mit dem Weglassen der Konstanten hängt eine ähnliche Bemerkung zusammen,
die über die Namen von Differentiation und Integration
gemacht werden kann,
als früher über den endlichen und unendlichen Ausdruck gemacht wurde,
daß nämlich in ihrer Bestimmung vielmehr das Gegenteil von dem liegt,
was der Ausdruck besagt.

Differentiieren bezeichnet das Setzen von Differenzen;
durch das Differentiieren aber wird eine Gleichung vielmehr
auf weniger Dimensionen herabgebracht,
durch das Weglassen der Konstante
wird ein Moment der Bestimmtheit hinweggenommen;

wie bemerkt, werden die Wurzeln der veränderlichen größe
auf eine Gleichheit gesetzt, die Differenz also derselben aufgehoben.

In der Integration hingegen soll die Konstante wieder hinzugesetzt werden;
die Gleichung wird dadurch allerdings, aber in dem Sinne integriert,
daß die vorher aufgehobene Differenz der Wurzeln wiederhergestellt,
das Gleichgesetzte wieder differentiiert wird.

- Der gewöhnliche Ausdruck trägt dazu bei,
die wesentliche Natur der Sache in Schatten zu setzen
und alles auf den untergeordneten,
ja der Hauptsache fremdartigen Gesichtspunkt
teils der unendlich kleinen Differenz, des Inkrements und dergleichen,
teils der bloßen Differenz überhaupt
zwischen der gegebenen und ((345)) der abgeleiteten Funktion,
ohne deren spezifischen, d. i. den qualitativen Unterschied zu bezeichnen,
zu stellen.

Ein anderes Hauptgebiet,
in welchem von dem Differentialkalkül Gebrauch gemacht wird,
ist die Mechanik;
von den unterschiedenen Potenzenfunktionen,
die sich bei den elementarischen Gleichungen ihres Gegenstandes,
der Bewegung, ergeben,
sind deren Bedeutungen bereits beiläufig erwähnt;
ich will dieselben hier direkt aufnehmen.

Die Gleichung, nämlich der mathematische Ausdruck,
der schlecht-gleichförmigen Bewegung $c = s/t$ oder $s = ct$,
in welcher die durchlaufenen Räume den verflossenen Zeiten
nach einer empirischen Einheit c, der größe der Geschwindigkeit,
proportioniert sind,
bietet für die Differentiation keinen Sinn dar;
der Koeffizient c ist bereits vollkommen bestimmt und bekannt,
und es kann keine weitere Potenzenentwicklung stattfinden.

- Wie $s = at^2$, die Gleichung der Bewegung des Falles, analysiert wird,
ist früher schon erinnert;
- das erste Glied der Analyse $ds/dt = 2at$ wird in die Sprache

und resp. [?] in die Existenz so übersetzt,
es solle ein Glied einer Summe (welche Vorstellung wir längst entfernt haben)
der eine Teil der Bewegung sein,
und zwar solle dieser der Kraft der Trägheit,
d. i. einer schlecht-gleichförmigen Geschwindigkeit so zukommen,
daß in den unendlichkleinen Zeitteilen die Bewegung gleichförmig,
in den endlichen Zeitteilen, d. h. in der Tat existierenden,
aber ungleichförmig sei.

Freilich ist fs = 2at und die Bedeutung von a und von t für sich bekannt,
sowie daß hiermit die Bestimmung
von gleichförmiger Geschwindigkeit einer Bewegung gesetzt ist;
da $a = s/t^2$, ist $2at = 2s/t$ überhaupt;
damit aber weiß man im geringsten nichts weiter;
nur die fälschliche Annahme,
daß 2at ein Teil der Bewegung als einer Summe sei,
gibt den fälschlichen Schein eines physikalischen Satzes.

Der Faktor selbst, a, die empirische Einheit - ein Quantum als solches -
wird der Schwere zugeschrieben;
wenn die Kategorie der Kraft der Schwere gebraucht wird,
so ist vielmehr zu sagen, daß eben das Ganze $s = at^2$ die Wirkung
oder besser das Gesetz der ((346)) Schwere ist.

- Gleichmäßig ist der aus $ds/dt = 2at$ abgeleitete Satz,
daß, wenn die Schwere aufhörte zu wirken,
der Körper mit der am Ende seines Falles erlangten Geschwindigkeit
den doppelten Raum von dem, welchen er durchlaufen hat,
in einer der Dauer seines Falles gleichen Zeit zurücklegen würde.

- Es liegt hierin auch eine für sich schiefe Metaphysik;
das Ende des Falles oder das Ende eines Zeitteils,
in welchem der Körper gefallen, ist immer selbst noch ein Zeitteil;
wäre es kein Zeitteil, so wäre Ruhe und damit keine Geschwindigkeit angenommen;
die Geschwindigkeit kann nur nach dem Raume angesetzt werden,
welcher in einem Zeitteil, nicht an seinem Ende, durchlaufen worden ist.

- Wenn nun aber vollends in anderen physikalischen Gebieten,
wo gar keine Bewegung vorhanden ist,
wie z. B. im Verhalten des Lichts

(außer dem, was seine Fortpflanzung im Raume genannt wird)
und [bei] Größenbestimmungen an den Farben,
eine Anwendung der Differentialrechnung gemacht wird
und die erste Funktion von einer quadratischen Funktion
hier auch Geschwindigkeit genannt wird,
so ist dies für einen noch unstatthafteren Formalismus
der Erdichtung von Existenz anzusehen.

Die Bewegung, welche durch die Gleichung $s = at^2$ vorgestellt wird,
finden wir, sagt Lagrange, in der Erfahrung vom Falle der Körper;
die einfachste Bewegung nach derselben würde die sein,
deren Gleichung $s = ct^3$ wäre, [?c=constanter Wert]
aber die Natur zeige keine Bewegung dieser Art;
wir wüßten nicht, was der Koeffizient c bedeuten könnte.

Wenn dem wohl so ist, so gibt es dagegen eine Bewegung,
deren Gleichung $s^3= at^2$ ist,
- das Keplersche Gesetz der Bewegung der Körper des Sonnensystems;
- was hier die erste abgeleitete Funktion $2at/3s^2$ usf. bedeuten soll,
und die fernere direkte Behandlung dieser Gleichung durch die Differentiation,
die Entwicklung der Gesetze und Bestimmungen
jener absoluten Bewegung von diesem Ausgangspunkte aus,
müßte dagegen wohl als eine interessante Aufgabe erscheinen,
in welcher die Analysis im würdigsten Glanze sich zeigen würde. ((347))

Für sich bietet so die Anwendung des Differentialkalküls
auf die elementarischen Gleichungen der Bewegung
kein reelles Interesse dar;
das formelle Interesse kommt von dem allgemeinen Mechanismus des Kalküls.

Eine andere Bedeutung aber erhält die Zerlegung der Bewegung
in Beziehung auf die Bestimmung ihrer Trajektorie;
wenn dieses eine Kurve ist und ihre Gleichung höhere Potenzen enthält,
bedarf es der Übergänge von geradlinigen Funktionen
als Funktionen der Potenzierung zu den Potenzen selbst,
und indem jene aus der ursprünglichen Gleichung der Bewegung,
welche den Faktor der Zeit enthält,
mit Elimination der Zeit zu gewinnen sind,

ist dieser zugleich auf die niedrigeren Entwicklungsfunktionen herabzusetzen,
aus welchen jene Gleichungen linearer Bestimmungen erhalten werden können.

Diese Seite führt auf das Interesse des anderen Teils der Differentialrechnung.

Das Bisherige hat den Zweck gehabt,
die einfache spezifische Bestimmung des Differentialkalküls
herauszuheben und festzustellen
und dieselbe in einigen der elementarischen Beispiele nachzuweisen.

Diese Bestimmung hat sich ergeben, darin zu bestehen,
daß aus einer Gleichung von Potenzenfunktionen
der Koeffizient des Entwicklungsgliedes,
die sogenannte erste Funktion gefunden
und das Verhältnis, welches diese ist,
in Momenten des konkreten Gegenstands aufgewiesen werde,
durch welche so erhaltene Gleichung
zwischen den beiden Verhältnissen diese Momente selbst bestimmt sind.

Es ist ebenso von dem Prinzip der Integralrechnung kurz zu betrachten,
was sich aus dessen Anwendung
für die spezifische konkrete Bestimmung derselben ergibt.

Die Ansicht dieses Kalküls ist dadurch schon vereinfacht
und richtiger bestimmt worden,
daß er nicht mehr als Summationsmethode genommen wird,
wie er im Gegensatz gegen das Differentiieren,
wo der Zuwachs als das wesentliche Ingrediens gilt, genannt wurde
und womit er in wesentlichem Zusammenhang mit der Form der Reihe erschien.

- Die Aufgabe dieses Kalküls ist zunächst ebenso
die ((348)) theoretische oder vielmehr formelle als die der Differentialrechnung,
bekanntlich aber die umgekehrte von dieser;
- es wird hier von einer Funktion ausgegangen, die als abgeleitete,
als der Koeffizient des nächsten aus der Entwicklung einer,
aber noch unbekannten Gleichung entsprungenen Gliedes betrachtet wird,
und aus ihr soll die ursprüngliche Potenzenfunktion gefunden werden;
die in der natürlichen Ordnung der Entwicklung als ursprünglich anzusehende
wird hier abgeleitet,

und die früher als abgeleitet betrachtete
ist hier die gegebene oder überhaupt die anfangende.

Das Formelle dieser Operation scheint nun aber bereits
durch den Differentialkalkül geleistet zu sein,
indem darin überhaupt der Übergang und das Verhältnis
von der ursprünglichen zu der Entwicklungsfunktion festgestellt ist.

Wenn hierbei, teils schon um die Funktion, von der auszugehen ist, anzusetzen,
teils aber den Übergang von ihr zu der ursprünglichen zu bewerkstelligen,
notwendig in vielen Fällen zu der Form der Reihe
die Zuflucht genommen werden muss,
so ist zunächst festzuhalten, daß diese Form als solche
mit dem eigentümlichen Prinzip des Integrierens
unmittelbar nichts zu tun hat.

Der andere Teil nun aber der Aufgabe des Kalküls
erscheint in Rücksicht auf die formelle Operation die Anwendung derselben.

Diese ist nun selbst die Aufgabe,
nämlich die Bedeutung in dem oben angegebenen Sinne zu kennen,
welche die ursprüngliche Funktion von der gegebenen,
als ersten Funktion betrachteten eines besonderen Gegenstandes hat.

An sich könnte auch diese Lehre bereits in der Differentialrechnung
ganz abgetan zu sein scheinen;
allein es tritt ein weiterer Umstand ein,
der die Sache nicht so einfach sein läßt.

Indem nämlich in diesem Kalkül sich ergeben [hat],
daß durch die erste Funktion der Gleichung einer Kurve
das Verhältnis, welches ein lineares ist, erhalten worden [? ist],
so weiß man damit auch, daß die Integration dieses Verhältnisses
die Gleichung der Kurve im Verhältnisse der Abszisse und Ordinate gibt;
oder wenn die Gleichung für die Ebene einer Kurve gegeben wäre,
so würde die Differentialrechnung ((349))
über die Bedeutung der ersten Funktion solcher Gleichung
bereits gelehrt haben sollen,
daß diese Funktion die Ordinate als Funktion der Abszisse,

hiermit die Gleichung der Kurve darstellte.

Nun kommt es aber darauf an,
welches von den Bestimmungsmomenten des Gegenstandes
in der Gleichung selbst gegeben ist;
denn nur von dem Gegebenen kann die analytische Behandlung
den Ausgang nehmen
und von da zu den übrigen Bestimmungen des Gegenstandes übergehen.

Es ist z. B. nicht die Gleichung eines Flächenraums der Kurve,
noch etwa des durch ihre Umdrehung entstehenden Körpers,
noch auch eines Bogens derselben,
sondern nur das Verhältnis der Abszisse und Ordinate
in der Gleichung der Kurve selbst gegeben.

Die Übergänge von jenen Bestimmungen zu dieser Gleichung selbst
können daher nicht schon in der Differentialrechnung behandelt werden;
es wird für die Integralrechnung aufgespart, diese Verhältnisse zu finden.

Ferner aber ist gezeigt worden,
daß die Differentiierung der Gleichung von mehreren veränderlichen Größen
die Entwicklungspotenz oder Differentialkoeffizienten
nicht als eine Gleichung, sondern nur als ein Verhältnis gibt;
die Aufgabe ist dann für dies Verhältnis,
welches die abgeleitete Funktion ist,
ein zweites in den Momenten des Gegenstandes anzugeben,
das jenem gleich sei.

Dagegen ist das Objekt der Integralrechnung
das Verhältnis selbst der ursprünglichen zu der abgeleiteten,
hier gegeben sein sollenden Funktion,
und die Aufgabe ist, die Bedeutung der zu findenden ursprünglichen Funktion
in dem Gegenstande der gegebenen ersten Funktion anzugeben
oder vielmehr, indem diese Bedeutung,
z. B. die Ebene einer Kurve oder die zu rektifizierende,
als geradlinig vorgestellte Kurve usf.,
schon als das Problem ausgesprochen ist,
zu zeigen, daß solche Bestimmung

durch eine ursprüngliche Funktion gefunden werde
und welches das Moment des Gegenstandes sei,
welches hierfür zur Ausgangs- (der abgeleiteten) Funktion
angenommen werden müsse. ((350))

Die gewöhnliche Methode nun,
welche die Vorstellung der Differenz als des Unendlichkleinen gebraucht,
macht sich die Sache leicht;
für die Quadratur der Kurven also nimmt sie ein unendlich kleines Rektangel,
ein Produkt der Ordinate in das Element, d. i. das Unendlichkleine der Abszisse,
für das Trapez, das zu einer seiner Seiten den unendlichkleinen,
jenem Unendlichkleinen der Abszisse gegenüberstehenden Bogen habe;
das Produkt wird nun in dem Sinne integriert,
daß das Integral die Summe der unendlich vielen Trapeze,
die Ebene, deren Bestimmung verlangt wird,
nämlich die endliche größe jenes Elements der Ebene gebe.

Ebenso formiert sie aus den Unendlichkleinen des Bogens
und der dazugehörigen Ordinate und Abszisse ein rechtwinkliges Dreieck,
in welchem das Quadrat jenes Bogens gleich sei
der Summe der Quadrate der beiden anderen Unendlichkleinen,
deren Integration den Bogen als einen endlichen gibt.

Dies Verfahren hat die allgemeine Entdeckung,
welche diesem Gebiete der Analysis zugrunde liegt,
zu seiner Voraussetzung, hier in der Weise,
daß die quadrierte Kurve, der rektifizierte Bogen usf.
zu einer gewissen,
durch die Gleichung der Kurve gegebenen Funktion
in dem Verhältnis der sogenannten ursprünglichen
Funktion zu der abgeleiteten steht.

Es handelt sich darum zu wissen,
wenn ein gewisser Teil eines mathematischen Gegenstandes (z. B. einer Kurve)
als die abgeleitete Funktion angenommen werde,
welcher andere Teil desselben
durch die entsprechende ursprüngliche Funktion ausgedrückt ist.

Man weiß, daß, wenn die durch die Gleichung der Kurve
gegebene Funktion der Ordinate
als abgeleitete Funktion genommen wird,
die relativ ursprüngliche Funktion der Größenausdruck
der von dieser Ordinate abgeschnittenen Area der Kurve ist,
daß, wenn eine gewisse Tangentenbestimmung
als abgeleitete Funktion angesehen wird,
die ursprüngliche Funktion derselben die größe
des zu dieser Tangentenbestimmung gehörigen Bogens ausdrückt usf.,
daß nun aber diese Verhältnisse,
das eine einer ursprünglichen Funktion zu der abgeleiteten,
das ((351)) andere von den Größen zweier Teile
oder Umstände des mathematischen Gegenstandes,
eine Proportion bilden,
- dies zu erkennen und zu beweisen erspart sich die Methode,
die das Unendlichkleine
und die mechanische Operation mit demselben gebraucht.

Das eigentümliche Verdienst des Scharfsinns ist,
aus den anderwärts her bereits bekannten Resultaten
herausgefunden zu haben,
daß gewisse und welche Seiten eines mathematischen Gegenstandes
in dem Verhältnisse von ursprünglicher und von abgeleiteter Funktion stehen.

Von diesen beiden Funktionen ist die abgeleitete
oder, wie sie bestimmt worden ist, die Funktion der Potenzierung
hier in diesem Kalkül die gegebene, relativ gegen die ursprüngliche,
als welche erst aus jener durch die Integration gefunden werden soll.

Allein sie ist nicht unmittelbar gegeben,
noch ist es für sich schon gegeben,
welcher Teil oder Bestimmung des mathematischen Gegenstandes
als die abgeleitete Funktion angesehen werden soll,
um durch Zurückführung derselben
auf die ursprüngliche den anderen Teil oder Bestimmung zu finden,
deren größe das Problem verlangt.

Die gewöhnliche Methode, die, wie gesagt,
sogleich gewisse Teile des Gegenstandes

als unendlich klein in der Form abgeleiteter Funktionen vorstellt,
welche sich aus der ursprünglich gegebenen Gleichung des Gegenstandes
überhaupt durch die Differentiierung bestimmen lassen
(wie für die Rektifikation einer Kurve
die unendlichkleinen Abszissen und Ordinaten),
nimmt dafür solche, welche sich mit dem Gegenstande des Problems
(in dem Beispiele dem Bogen),
der ebenso als unendlichklein vorgestellt wird,
in eine Verbindung bringen lassen,
die in der Elementarmathematik festgestellt ist
und wodurch, wenn jene Teile bekannt sind, auch dieser bestimmt ist,
dessen größe zu finden aufgegeben ist;
so werden für die Rektifikation die angegebenen drei Unendlichkleinen
in die Verbindung der Gleichung des rechtwinkligen Dreiecks gebracht,
für die Quadratur die Ordinate mit der unendlichkleinen Abszisse
in die Verbindung eines Produkts,
indem ((352)) eine Ebene überhaupt arithmetisch
als Produkt von Linien angenommen ist.

Der Übergang von solchem sogenannten Elemente der Ebene, des Bogens usf.
zur größe der Ebene, des Bogens usf. selbst
gilt dann nur als das Aufsteigen von dem unendlichen Ausdruck zum endlichen
oder zur Summe der unendlich vielen Elemente,
aus denen die verlangte größe bestehen soll.

Es kann daher nur oberflächlich gesagt werden,
daß die Integralrechnung bloß das umgekehrte,
überhaupt jedoch schwierigere Problem der Differentialrechnung sei;
das reelle Interesse der Integralrechnung geht vielmehr ausschließlich
auf das Verhältnis der ursprünglichen und der abgeleiteten Funktion
in den konkreten Gegenständen zueinander.

Lagrange ist ebensowenig in diesem Teile des Kalküls darauf eingegangen,
die Schwierigkeit der Probleme
auf die glatte Weise jener direkten Annahmen abzutun.

Es wird zur Erläuterung der Natur der Sache beitragen,
gleichfalls das Nähere seines Verfahrens

aus einigen wenigen Beispielen anzugeben.

Dasselbe macht es sich eben zur Aufgabe, für sich zu beweisen,
daß zwischen besonderen Bestimmungen eines mathematischen Ganzen,
z. B. einer Kurve,
ein Verhältnis von der ursprünglichen zu der abgeleiteten Funktion stattfinde.

Dies kann nun aber in diesem Felde
vermöge der Natur des Verhältnisses selbst,
welches am mathematischen Gegenstande krumme mit geraden Linien,
lineare Dimensionen und Funktionen derselben mit Ebenen-Flächen-Dimensionen
und deren Funktion usf., also qualitativ verschiedene in Beziehung bringt,
nicht auf direkte Weise bewerkstelligt werden;
die Bestimmung läßt sich so nur als die Mitte
zwischen einem Größeren und Kleineren auffassen.

Hiermit tritt von selbst wohl wieder
die Form eines Zuwachses mit Plus und Minus ein,
und das rüstige développons ist an seiner Stelle;
aber wie die Zuwächse hier nur arithmetische, endliche Bedeutung haben,
davon ist vorhin gesprochen worden.

Aus der Entwicklung jener Bedingung,
daß die zu bestimmende größe
größer als die eine leicht ((353)) bestimmbare Grenze
und kleiner als die andere sei,
wird dann z. B. hergeleitet,
daß die Funktion der Ordinate
die abgeleitete erste Funktion zu der Funktion der Area ist.

Die Rektifikation der Kurven, wie sie von Lagrange aufgezeigt wird,
indem er von dem Archimedischen Prinzip ausgeht,
hat das Interesse, die Übersetzung der Archimedischen Methode
in das Prinzip der neueren Analysis einzusehen,
was einen Blick in das Innere und in den wahrhaften Sinn
des auf die andere Art mechanisch betriebenen Geschäftes tun läßt.

Die Verfahrungsweise ist der soeben angegebenen notwendig analog;
das Archimedische Prinzip, daß der Bogen einer Kurve

größer ist als seine Chorde
und kleiner als die Summe zweier an den Endpunkten des Bogens
gezogenen Tangenten, insoweit sie zwischen diesen Punkten
und ihrem Durchschnittspunkt enthalten sind,
gibt keine direkte Gleichung.

Die Übertragung jener Archimedischen Grundbestimmung
in die moderne analytische Form ist die Erfindung eines Ausdrucks,
der für sich eine einfache Grundgleichung sei,
während jene Form nur die Forderung aufstellt,
zwischen einem zu großen und zu Kleinen, die sich jedesmal bestimmt haben,
ins Unendliche fortzugehen, welches Fortgehen
wieder immer nur ein neues zu großes und ein neues zu Kleines,
jedoch in immer engeren Grenzen gibt.

Vermittels des Formalismus des Unendlichkleinen
wird sogleich die Gleichung $dz^2 = dx^2 + dy^2$ angesetzt.

Die Lagrangesche Exposition, ausgehend von der angegebenen Grundlage,
zeigt hingegen auf, daß die größe des Bogens
die ursprüngliche Funktion ist zu einer abgeleiteten,
von der das eigentümliche Glied selbst eine Funktion aus dem Verhältnisse
einer abgeleiteten zu der ursprünglichen der Ordinate ist.

Weil in dem Archimedischen Verfahren,
wie dann später in der Keplerschen Behandlung
stereometrischer Gegenstände,
die Vorstellung vom Unendlichkleinen vorkommt,
so ist dies so oft als eine Autorität für den Gebrauch,
der von dieser Vorstellung in dem Differentialkalkül gemacht wird,
angeführt ((354)) worden, ohne daß das Eigentümliche und Unterscheidende
herausgehoben worden wäre.

Das Unendlichkleine bedeutet zunächst
die Negation des Quantums als eines solchen,
d. i. eines sogenannten endlichen Ausdrucks,
der vollendeten Bestimmtheit, wie sie das Quantum als solches hat.

Ebenso ist in den darauf folgenden berühmten Methoden

des Valerius, ° Cavalieri ° u. a., die sich auf die Betrachtung
der Verhältnisse geometrischer Gegenstände gründen,
die Grundbestimmung, daß das Quantum als solches der Bestimmungen,
welche nur im Verhältnisse zunächst betrachtet werden,
für diesen Behuf auf die Seite gestellt
und sie hiernach als ein Nicht-großes sollen genommen werden.

Aber teils ist hiermit das Affirmative überhaupt,
welches hinter der bloß negativen Bestimmung liegt,
nicht erkannt und herausgehoben,
welches sich oben abstrakt als die qualitative Größenbestimmtheit
und diese bestimmter in dem Potenzenverhältnisse liegend sich ergeben hat,
- teils aber, indem dies Verhältnis
selbst wieder eine Menge näher bestimmter Verhältnisse in sich begreift,
wie das einer Potenz und deren Entwicklungsfunktion,
so haben sie auch wieder auf die allgemeine und negative Bestimmung
desselben Unendlichkleinen gegründet und daraus abgeleitet werden sollen.

In der eben herausgehobenen Lagrangeschen Exposition
ist das bestimmte Affirmative,
das in der Archimedischen Entwicklungsweise der Aufgabe liegt,
gefunden und damit dem
mit einem unbegrenzten Hinausgehen behafteten Verfahren
seine richtige Grenze gegeben worden.

Das große der modernen Erfindung für sich
und ihre Fähigkeit, vorher intraktable Probleme zu lösen
und die früher lösbaren auf eine einfache Weise zu behandeln,
ist allein in die Entdeckung des Verhältnisses
der ursprünglichen zu den sogenannten abgeleiteten
und der Teile, welche an einem mathematischen Ganzen
in einem solchen Verhältnisse stehen, zu setzen. ((355))

Die gemachten Anführungen mögen für den Zweck genügen,
das Eigentümliche des Verhältnisses von Größen herauszuheben,
welches der Gegenstand der in Rede stehenden
besondern Art des Kalküls ist.

Diese Anführungen konnten sich

auf einfache Probleme und deren Auflösungsweisen beschränken;
und weder wäre es für die Begriffsbestimmung,
um die es hier allein zu tun war, zweckmäßig gewesen,
noch hätte es in dem Vermögen des Verfassers gestanden,
den gesamten Umfang der sogenannten Anwendung
der Differential- und Integralrechnung vorzunehmen
und die Induktion, daß das aufgezeigte Prinzip derselben zugrunde liege,
durch die Zurückführung aller ihrer Probleme und deren Lösungen
darauf zu vervollständigen.

Das Beigebrachte hat aber hinreichend gezeigt,
daß, wie jede besondere Rechnungsweise eine besondere Bestimmtheit
oder Verhältnis der größe zu ihrem Gegenstande hat
und ein solches das Addieren, Multiplizieren,
das Erheben in Potenzen und Ausziehen der Wurzeln,
die Rechnung mit Logarithmen, Reihen usf. konstituiert,
ebenso der Differential- und Integralkalkül;
für das diesem Kalkül Angehörige möchte der Name des Verhältnisses
einer Potenzenfunktion und der Funktion ihrer Entwicklung oder Potenzierung
der passendste sein,
weil er der Einsicht der Natur der Sache am nächsten liegt.

Nur wie die Operationen nach den anderen Größenverhältnissen,
wie Addieren usf.,
bei diesem Kalkül überhaupt gleichfalls gebraucht werden,
werden auch die Logarithmen-, Kreis- und Reihenverhältnisse angewendet,
insbesondere um Ausdrücke zum Behuf der erforderlichen Operationen
des Ableitens der ursprünglichen aus den Entwicklungsfunktionen
traktabler zu machen.

Mit der Reihenform hat die Differential- und Integralrechnung
wohl das nähere Interesse gemeinschaftlich, die Entwicklungsfunktionen,
welche bei den Reihen die Koeffizienten der Glieder heißen, zu bestimmen;
aber indem das Interesse jenes Kalküls nur
auf das Verhältnis der ursprünglichen Funktion
zu dem nächsten Koeffizienten ihrer Entwicklung geht,
will die Reihe in der ((356)) nach Potenzen,
die mit jenen Koeffizienten versehen sind,
geordneten Menge von Gliedern eine Summe darstellen.

Das Unendliche, das bei der unendlichen Reihe vorkommt,
der unbestimmte Ausdruck des Negativen des Quantums überhaupt,
hat mit der affirmativen Bestimmung,
welche im Unendlichen jenes Kalküls liegt, nichts gemein.

Ebenso ist das Unendlichkleine, als der Zuwachs,
vermittels dessen die Entwicklung in die Form der Reihe fällt,
nur ein äußeres Mittel für die Entwicklung,
und seine sogenannte Unendlichkeit [ist] ohne alle andere Bedeutung
als die, sonst gar keine zu haben als die jenes Mittels;
die Reihe, da sie in der Tat es nicht ist, die verlangt wird,
führt ein Zuviel herbei,
welches wieder wegzubringen die überflüssige Mühe macht.

Von dieser Mühe ist die Methode Lagranges,
der die Form der Reihe vorzugsweise wieder aufgenommen hat,
gleichfalls gedrückt;
obgleich sie es ist, durch welche in dem, was die Anwendung genannt wird,
die wahre Eigentümlichkeit sich heraushebt,
indem, ohne die Formen von dx, dy usf. in die Gegenstände hineinzuzwängen,
direkt derjenige Teil nachgewiesen wird, dem an ihnen
die Bestimmtheit der abgeleiteten (Entwicklungs-) Funktion zukommt
und es sich damit zeigt, daß die Form der Reihe
hier nicht das ist, um das es sich handelt. °

°Fuß
In der oben angeführten Kritik
(Jahrbuch für wissenschaftliche Kritik, 11. Bd., 1827, Nr. 155, 6)
finden sich interessante Äußerungen eines gründlichen Gelehrten des Faches,
Herrn Spehr °, aus seinen Neuen Prinzipien des Fluentenkalküls, Braunschweig 1826,
angeführt, die nämlich einen Umstand betreffen,
der wesentlich zu den Dunkelheiten und dem Unwissenschaftlichen
in der Differentialrechnung beitrage,
und stimmen mit dem überein, was über das allgemeine Verhältnis
der Theorie dieses Kalküls gesagt worden ist:
»Man hat«, heißt es daselbst, »rein arithmetische Untersuchungen,
welche freilich von allen ähnlichen
zunächst auf die Differentialrechnung Bezug haben,
nicht von der eigentlichen Differentialrechnung gesondert,
ja diese Untersuchungen wohl gar, wie Lagrange, für die Sache selbst gehalten,

während man diese nur als Anwendung jener ansah.

Diese arithmetischen Untersuchungen
begreifen die Regeln der ((357)) Differentiation,
die Ableitung des Taylorschen Lehrsatzes usw.,
ja selbst die verschiedenen Integrationsmethoden in sich.

Es ist ganz umgekehrt der Fall;
jene Anwendungen sind es gerade,
welche den Gegenstand der eigentlichen Differentialrechnung ausmachen,
und alle jene arithmetischen Entwicklungen und Operationen
setzt sie aus der Analysis voraus.«

- Es ist aufgezeigt worden,
wie bei Lagrange die Trennung der sogenannten Anwendung
von dem Verfahren des allgemeinen Teils, das von den Reihen ausgeht,
eben dazu dient, die eigentümliche Sache der Differentialrechnung
für sich zum Vorschein zu bringen.

Aber bei der interessanten Einsicht des Herrn Verfassers,
daß eben die sogenannten Anwendungen es sind,
welche den Gegenstand der eigentlichen Differentialrechnung ausmachen,
ist es zu verwundern, wie derselbe sich
in die (ebenda angeführte) formelle Metaphysik
von kontinuierlicher größe, Werden, Fließen usf.
hat einlassen und solchen Ballast noch mit neuem gar hat vermehren wollen;
formell sind diese Bestimmungen, indem sie nur allgemeine Kategorien sind,
welche eben das Spezifische der Sache nicht angeben,
die aus den konkreten Lehren, den Anwendungen, zu erkennen
und zu abstrahieren war.

Anmerkung 3: Noch andere mit der qualitativen Größenbestimmtheit zusammenhängende Formen
Das Unendlichkleine der Differentialrechnung
ist in seinem affirmativen Sinn als die qualitative Größenbestimmtheit,
und von dieser [ist] näher aufgezeigt worden,
daß sie in diesem Kalkül als Potenzenbestimmtheit nicht nur überhaupt,
sondern als die besondere des Verhältnisses einer Potenzenfunktion
zu der Entwicklungspotenz vorhanden ist.

Die qualitative Bestimmtheit ist aber auch noch in weiterer,
sozusagen schwächerer Form vorhanden,
und diese, wie auch der damit zusammenhängende
Gebrauch des Unendlichkleinen
und dessen Sinn in diesem Gebrauche,
soll noch in dieser Anmerkung betrachtet werden.

Es ist, indem wir vom Vorhergehenden ausgehen,
in dieser Rücksicht zuerst daran zu erinnern,
daß die unterschiedenen Potenzenbestimmungen
von der analytischen Seite zunächst so hervortreten,
daß sie nur formell und ganz homogen darin sind,
daß sie Zahlengrößen bedeuten,
die als solche jene qualitative Verschiedenheit gegeneinander nicht haben.

Aber in der Anwendung auf räumliche Gegenstände
zeigt sich das analytische Verhältnis
ganz in seiner qualitativen ((358)) Bestimmtheit
als das Übergehen von linearen zu Flächenbestimmungen,
von geradlinigen zu krummlinigen usf.

Diese Anwendung bringt es ferner mit sich, daß die räumlichen,
ihrer Natur nach in Form von kontinuierlichen Größen gegebenen Gegenstände
in diskreter Weise gefaßt werden,
die Fläche also als eine Menge von Linien,
die Linie als eine Menge von Punkten usf.

Diese Auflösung hat das einzige Interesse, die Punkte, in welche die Linie,
die Linien, in welche die Fläche usf. aufgelöst ist, selbst zu bestimmen,
um von solcher Bestimmung aus analytisch,
d. h. eigentlich arithmetisch fortgehen zu können;
diese Ausgangspunkte sind für die zu findenden Größenbestimmungen
die Elemente, aus welchen die Funktion und Gleichung
für das Konkrete, die kontinuierliche große, abgeleitet werden soll.

Für die Probleme, wo sich vornehmlich das Interesse zeigt,
dies Verfahren zu gebrauchen,
wird im Elemente für den Ausgang ein für sich selbst Bestimmtes verlangt,
gegen den Gang, der indirekt ist,

indem er im Gegenteil nur mit Grenzen beginnen kann,
zwischen welchen das Fürsichbestimmte liege, auf das als sein Ziel er losgehe.

Das Resultat läuft in beiden Methoden dann auf dasselbe hinaus,
wenn sich nur das Gesetz des weiteren Fortbestimmens finden läßt,
ohne die geforderte vollkommene,
d. h. sogenannte endliche Bestimmung erlangen zu können.

Kepler wird die Ehre zugeschrieben,
zuerst den Gedanken jener Umkehrung des Ganges gehabt
und das Diskrete zum Ausgangspunkt gemacht zu haben.

Seine Erklärung, wie er den ersten Satz in Archimeds Kreismessung verstehe,
drückt dies auf einfache Weise aus.

Der erste Satz Archimeds ist bekanntlich,
daß der Kreis einem rechtwinkligen Dreieck gleich ist,
dessen eine Kathete dem Halbmesser,
die andere dem Umfange des Kreises gleich ist.

Indem Kepler den Sinn dieses Satzes so nimmt,
daß die Peripherie des Kreises ebensoviele Teile als Punkte,
d. i. unendlich viele habe, deren jeder
als die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks betrachtet werden könne usf.,
so spricht er die Auflösung des Kontinuierlichen ((359))
in die Form des Diskreten aus.

Der Ausdruck des Unendlichen, der hierbei vorkommt,
ist noch weit entfernt von der Bestimmung,
die er in dem Differentialkalkül haben soll.

- Wenn nun für solche Diskrete eine Bestimmtheit, Funktion gefunden ist,
so sollen sie ferner zusammengefaßt werden,
wesentlich als Elemente des Kontinuierlichen sein.

Da aber eine Summe von Punkten keine Linie,
eine Summe von Linien keine Fläche gibt,
werden die Punkte schon sogleich als lineare genommen,
wie die Linien als flächenhafte.

Weil jedoch zugleich jene Lineare noch keine Linien sein sollen,
was sie sein würden, wenn sie als Quantum genommen würden,
so werden sie als unendlich klein vorgestellt.

Das Diskrete ist nur eines äußerlichen Zusammenfassens fähig,
in welchem die Momente den Sinn von diskretem Eins behalten;
der analytische Übergang von denselben geschieht nur zu ihrer Summe,
er ist nicht zugleich der geometrische von dem Punkte in die Linie
oder von der Linie in die Fläche usf.;
dem Elemente, das als Punkt oder als Linie seine Bestimmung hat,
wird daher zugleich auch
mit jenem die lineare, dieser die Flächenqualität gegeben,
damit die Summe als von kleinen Linien eine Linie,
als von kleinen Flächen eine Fläche werde.

Das Bedürfnis, dies Moment des qualitativen Übergangs zu erhalten
und dafür zu dem Unendlichkleinen die Zuflucht zu nehmen,
muss als die Quelle aller der Vorstellungen angesehen werden,
welche, indem sie jene Schwierigkeit ausgleichen sollen,
an ihnen selbst die größte Schwierigkeit sind.

Diese Nothilfe entbehrlich zu machen, müßte gezeigt werden können,
daß in dem analytischen Verfahren selbst,
welches als ein bloßes Summieren erscheint,
in der Tat schon ein Multiplizieren enthalten ist.

Aber in dieser Rücksicht tritt eine neue Annahme,
welche die Grundlage in dieser Anwendung
arithmetischer Verhältnisse auf geometrische Figurationen ausmacht, ein;
nämlich daß das arithmetische Multiplizieren
auch für die geometrische Bestimmung
ein Übergang in eine höhere Dimension,
- die arithmetische Multiplikation ((360)) von Größen,
die ihren räumlichen Bestimmungen nach Linien sind,
zugleich eine Produktion des Linearen zur Flächenbestimmung sei;
3mal 4 lineare Fuße gibt 12 lineare Fuße,
aber 3 lineare Fuße mal 4 lineare Fuße
gibt 12 Flächenfuße, und zwar Quadratfuße,
indem die Einheit in beiden als diskreten Größen dieselbe ist.

Die Multiplikation von Linien mit Linien
bietet sich zunächst als etwas Widersinniges dar,
insofern die Multiplikation überhaupt Zahlen betrifft,
d. i. eine Veränderung von solchen ist, welche mit dem, in das sie übergehen,
mit dem Produkte ganz homogen sind und nur die größe verändern.

Dagegen ist das, was Multiplizieren der Linie als solcher mit Linie hieße
- es ist ductus lineae in lineam wie plani in planum genannt worden,
es ist auch dructus puncti in lineam -,
eine Veränderung nicht bloß der größe,
sondern ihrer als qualitativer Bestimmung der Räumlichkeit,
als einer Dimension;
das Übergehen der Linie in Fläche
ist als Außersichkommen derselben zu fassen,
wie das Außersichkommen des Punktes die Linie,
der Fläche ein ganzer Raum ist.

Es ist dies dasselbe, was so vorgestellt wird,
daß die Bewegung des Punktes die Linie usf. sei;
aber die Bewegung schließt die Zeitbestimmung ein
und erscheint so in jener Vorstellung mehr nur
als eine zufällige, äußerliche Veränderung des Zustandes;
es ist aber die Begriffsbestimmtheit,
die als Außersichkommen ausgedrückt worden, zu nehmen,
- die qualitative Veränderung,
und welche arithmetisch ein Multiplizieren der Einheit (als des Punktes usf.)
in die Anzahl (in die Linie usf.) ist.

- Es kann hierzu noch bemerkt werden,
daß bei dem Außersichkommen der Fläche,
was als ein Multiplizieren von Fläche in Fläche erscheinen würde,
sich der Schein eines Unterschiedes
des arithmetischen und geometrischen Produzierens so ergibt,
daß das Außersichkommen der Fläche als ductus plani in planum arithmetisch
eine Multiplikation der zweiten Dimensionsbestimmung mit solcher,
hiermit ein Produkt von vier Dimensionen gäbe,
das aber durch die geometrische Bestimmung auf drei herabgesetzt wird.

Wenn auf der einen ((361)) Seite die Zahl darum,

weil sie das Eins zu ihrem Prinzip hat,
die feste Bestimmung für das äußerliche Quantitative gibt,
so sehr ist [andererseits] ihr Produzieren formell;
3 * 3, als Zahlbestimmung genommen, sich selbst produzierend
ist 3 * 3 @ 3 * 3;
aber dieselbe größe als Flächenbestimmung sich produzierend
wird bei 3 * 3 * 3 zurückgehalten,
weil der Raum als ein Hinausgehen vom Punkte,
der nur abstrakten Grenze aus vorgestellt
seine wahrhafte Grenze als konkrete Bestimmtheit von der Linie aus
in der dritten Dimension hat.

Der angeführte Unterschied könnte sich in Rücksicht der freien Bewegung,
worin die eine, die räumliche Seite unter der geometrischen Bestimmung
(im Keplerschen Gesetze $s^3 : t^2$),
die andere, die zeitliche Seite unter der arithmetischen steht,
von Wirksamkeit zeigen.

Wie das Qualitative, das hier betrachtet wird,
von dem Gegenstande der vorigen Anmerkung verschieden ist,
kann nun ohne weitere Bemerkung von selbst erhellen.

In dieser lag das Qualitative in der Potenzenbestimmtheit;
hier ist dasselbe wie das Unendlichkleine,
nur als Faktor arithmetisch gegen das Produkt
oder als Punkt gegen die Linie, Linie gegen Fläche usf.

Der qualitative Übergang nun, der von dem Diskreten,
als in welches die kontinuierliche größe aufgelöst vorgestellt wird,
zu dem Kontinuierlichen zu machen ist,
wird als ein Summieren bewerkstelligt.

Daß aber die angebliche bloße Summation in der Tat eine Multiplikation,
also den Übergang von der linearen in die Flächenbestimmung
in sich selbst enthält, erscheint am einfachsten in der Art,
wie zum Beispiel gezeigt wird,
daß der Flächeninhalt eines Trapezes gleich sei
dem Produkt der Summe der beiden gegenüberstehenden parallelen Linien

in die halbe Höhe.

Diese Höhe wird nur als die Anzahl
von einer Menge diskreter Größen vorgestellt,
welche summiert werden sollen.

Diese Größen sind Linien,
die parallel zwischen jenen zwei begrenzenden Parallelen liegen;
es sind deren unendlich viele, denn sie sollen die Fläche ausmachen,
sind aber Linien, welche also, um ein Flächenhaftes zu sein, ((362))
zugleich mit der Negation gesetzt werden müssen.

Um der Schwierigkeit zu entgehen,
daß eine Summe von Linien eine Fläche geben sollte,
werden Linien sogleich als Flächen,
aber gleichfalls als unendlich dünne angenommen,
denn ihre Determination haben sie allein
in dem Linearen der parallelen Grenzen des Trapezes.

Als parallel
und durch das andere Paar der geradlinigen Seiten des Trapezes begrenzt,
können sie als die Glieder einer arithmetischen Progression vorgestellt werden,
deren Differenz dieselbe überhaupt ist, aber nicht bestimmt zu werden braucht,
und deren erstes und letztes Glied jene beiden Parallelen sind;
die Summe solcher Reihe ist bekanntlich
das Produkt jener Parallelen in die halbe Anzahl der Glieder.

Dies letzte Quantum ist nur ganz relativ
auf die Vorstellung von den unendlich vielen Linien
Anzahl genannt;
es ist die Größenbestimmtheit überhaupt eines Kontinuierlichen, - der Höhe.

Es ist deutlich, daß, was Summe heißt,
zugleich ein ductus lineae in lineam,
Multiplizieren von Linearem mit Linearem,
nach obiger Bestimmung ein Hervorgehen von Flächenhaftem ist.

In dem einfachsten Falle nun eines Rektangels überhaupt, ab,
ist jeder der beiden Faktoren eine einfache größe;
aber schon in dem weiteren selbst elementarischen Beispiele vom Trapez

ist nur der eine Faktor das Einfache der halben Höhe,
der andere dagegen wird durch eine Progression bestimmt;
er ist gleichfalls ein Lineares,
dessen Größenbestimmtheit aber verwickelter ist;
insofern sie nur durch eine Reihe ausgedrückt werden kann,
so heißt analytisch, d. h. arithmetisch das Interesse, sie zu summieren;
das geometrische Moment darin aber ist die Multiplikation,
das Qualitative des Übergangs aus der Dimension der Linie in die Fläche;
der eine Faktor ist diskret
nur für die arithmetische Bestimmung des anderen genommen worden
und ist für sich, wie dieser, die größe eines Linearen.

Das Verfahren, Flächen als Summen von Linien vorzustellen,
wird aber auch häufig gebraucht,
wo nicht eine Multiplikation als solche zum Behufe des Resultates statthat.

Dies ((363)) geschieht, wo es nicht darum zu tun ist,
die größe in der Gleichung als Quantum anzugeben,
sondern in einer Proportion.

Es ist z. B. eine bekannte Art zu zeigen,
daß eine Kreisfläche sich zur Fläche einer Ellipse,
deren große Achse der Diameter jenes Kreises ist,
verhalte wie die große zur kleinen Achse,
indem jede dieser Flächen als die Summe der ihr zugehörigen Ordinaten
genommen wird;
jede Ordinate der Ellipse verhält sich zu der entsprechenden des Kreises
wie die kleine zur großen Achse;
also, wird geschlossen, verhalten [sich] auch die Summen der Ordinaten,
d. i. die Flächen ebenso.

Diejenigen, welche dabei die Vorstellung der Fläche
als einer Summe von Linien vermeiden wollen,
machen die Ordinaten mit der gewöhnlichen,
ganz überflüssigen Aushilfe zu Trapezen von unendlich kleiner Breite;
da die Gleichung nur eine Proportion ist,
kommt nur das eine der zwei linearen Elemente der Fläche in Vergleichung.

Das andere, die Abszissenachse, ist in Ellipse und Kreis als gleich,

als Faktor arithmetischer Größenbestimmung, also gleich 1 angenommen
und die Proportion daher ganz nur
von dem Verhältnis des einen bestimmenden Moments abhängig.

Zur Vorstellung der Fläche sind die zwei Dimensionen notwendig;
aber die Größenbestimmung,
wie sie in jener Proportion angegeben werden soll,
geht nur auf das eine Moment allein;
der Vorstellung damit nachgeben oder aufhelfen,
daß die Vorstellung von Summe zu diesem einen Momente hinzugefügt wird,
ist eigentlich eine Verkennung dessen,
worauf es hier für die mathematische Bestimmtheit ankommt.

Was hier auseinandergesetzt worden, enthält auch
das Kriterium für die früher erwähnte Methode der Unteilbaren des Cavalieri,
die damit ebenso gerechtfertigt ist
und der Zuflucht zu dem Unendlichkleinen nicht bedarf.

Diese Unteilbaren sind Linien, indem er eine Fläche,
oder Quadrate, Kreisflächen,
indem er eine Pyramide oder Konus usf. betrachtet;
die als bestimmt angenommene Grundlinie, Grundfläche nennt er die Regel;
es ist die Konstante, in Beziehung auf eine Reihe
das erste oder letzte Glied derselben;
mit ihr ((364)) werden jene Unteilbaren parallel,
also in gleicher Bestimmung in Rücksicht der Figur betrachtet.

Der allgemeine Grundsatz Cavalieris ist nun
(Exercitationes geometricae, VI - das spätere Werk [1647] - Exerc. 1, p. 6),
»daß alle sowohl ebenen als körperlichen Figuren
im Verhältnisse aller ihrer Indivisibilien sind,
diese kollektiv und,
wenn etwa ein gemeinschaftliches Verhältnis in solchen stattfindet,
distributiv miteinander vergleichen«.

- Er vergleicht zu diesem Behufe in den Figuren,
von gleicher Grundlinie und Höhe gemacht,
die Verhältnisse von den Linien, die parallel mit jener
und in gleicher Entfernung mit ihr gezogen werden;

alle solchen Linien einer Figur haben eine und dieselbe Bestimmung
und machen deren ganzen Inhalt aus.

Auf solche Weise beweist Cavalieri z. B. auch den elementarischen Satz,
daß Parallelogramme von gleicher Höhe
im Verhältnisse ihrer Grundlinie sind;
jede zwei Linien, in gleicher Entfernung von der Grundlinie
und mit ihr parallel, in beiden Figuren gezogen,
sind in demselben Verhältnisse der Grundlinien, also die ganzen Figuren.

In der Tat machen die Linien
nicht den Inhalt der Figur als kontinuierlicher aus,
aber den Inhalt, insofern er arithmetisch bestimmt werden soll;
das Lineare ist sein Element,
durch welches allein die Bestimmtheit desselben gefaßt werden muss.

Wir werden hierbei darauf geführt, auf den Unterschied zu reflektieren,
der in Ansehung dessen stattfindet,
worein die Bestimmtheit einer Figur fällt;
nämlich entweder ist sie beschaffen wie hier die Höhe der Figur,
oder sie ist äußere Grenze.

Insofern sie als äußere Grenze ist, gibt man zu,
daß der Gleichheit oder dem Verhältnisse der Grenze
die Kontinuität der Figur sozusagen folgt;
z. B. die Gleichheit der Figuren, die sich decken, beruht darauf,
daß die begrenzenden Linien sich decken.

Bei Parallelogrammen aber von gleicher Höhe und Grundlinie
ist nur die letztere Bestimmtheit eine äußere Grenze;
die Höhe, nicht die Parallelität überhaupt,
auf welcher die zweite Hauptbestimmung der Figuren, ihr Verhältnis, beruht,
führt ein zweites Prinzip ((365)) der Bestimmung
zu den äußeren Grenzen herbei.

Der Euklidische Beweis von der Gleichheit der Parallelogramme,
die gleiche Höhe und Grundlinie haben,
führt sie auf Dreiecke zurück, auf äußerlich begrenzte Kontinuierliche;
in Cavalieris Beweis, zunächst über die Proportionalität von Parallelogrammen,

ist die Grenze Größenbestimmtheit als solche überhaupt,
welche, als an jedem Paare von Linien,
die mit gleichem Abstand in beiden Figuren gezogen werden, genommen,
expliziert wird.

Diese gleichen oder in gleichem Verhältnis mit der Grundlinie stehenden
Linien, kollektiv genommen,
geben die in gleichem Verhältnisse stehenden Figuren.

Die Vorstellung eines Aggregats von Linien
geht gegen die Kontinuität der Figur;
allein die Betrachtung der Linien erschöpft die Bestimmtheit,
auf welche es ankommt, vollkommen.

Cavalieri gibt häufige Antwort auf die Schwierigkeit,
als ob die Vorstellung von den Unteilbaren es mit sich führe,
daß der Anzahl nach unendliche Linien oder Ebenen verglichen werden sollen
(Geometria [indivisibilium continuorum nova, 1635], lib. II, Prop. I, Schol.);
er macht den richtigen Unterschied,
daß er nicht die Anzahl derselben, welche wir nicht kennen
- d. i. vielmehr die, wie bemerkt worden,
eine zu Hilfe genommene leere Vorstellung ist -,
sondern nur die größe, d. i. die quantitative Bestimmtheit als solche,
welche dem von diesen Linien eingenommenen Raume gleich ist,
vergleiche;
weil dieser in Grenzen eingeschlossen ist,
ist auch jene seine größe in dieselben Grenzen eingeschlossen;
das Kontinuierliche ist nichts anderes als die Unteilbaren selbst, sagt er;
wäre es etwas außer diesen, so wäre es nicht vergleichbar;
es würde aber ungereimt sein zu sagen,
begrenzte Kontinuierliche seien nicht miteinander vergleichbar.

Man sieht, daß Cavalieri dasjenige,
was zur äußerlichen Existenz des Kontinuierlichen gehört,
von demjenigen unterscheiden will,
worein dessen Bestimmtheit fällt
und das für die Vergleichung und zum Behufe von Theoremen über dasselbe
allein herauszuheben ist.

Die Kategorien, die er ((366)) dabei gebraucht,
daß das Kontinuierliche aus den Unteilbaren zusammengesetzt sei
oder bestehe und dergleichen,
sind freilich nicht genügend, weil dabei die Anschauung des Kontinuierlichen
oder, wie vorhin gesagt, dessen äußerliche Existenz
zugleich in Anspruch genommen wird;
statt zu sagen, daß das Kontinuierliche
nichts anderes ist als die Unteilbaren selbst,
würde es richtiger und damit auch sogleich für sich klar heißen,
daß die Größenbestimmtheit des Kontinuierlichen keine andere ist
als die der Unteilbaren selbst.

- Cavalieri macht sich nichts aus der schlechten Folgerung,
daß es größere und kleinere Unendliche gebe,
welche aus der Vorstellung,
daß die Unteilbaren das Kontinuierliche ausmachen,
von der Schule gezogen werde,
und drückt weiterhin (Geometria, Lib. VII, Praef.)
das bestimmtere Bewußtsein aus, daß er durch seine Beweisart
keineswegs zur Vorstellung der Zusammensetzung des Kontinuierlichen
aus den Unteilbaren genötigt sei;
die Kontinuierlichen folgen nur der Proportion der Unteilbaren.

Er habe die Aggregate der Unteilbaren nicht so genommen,
wie sie in die Bestimmung der Unendlichkeit
um einer unendlichen Menge von Linien oder Ebenen willen
zu verfallen scheinen,
sondern insofern sie eine bestimmte Beschaffenheit
und Natur der Begrenztheit an ihnen haben.

Um denn aber doch diesen Stein des Anstoßes zu entfernen,
läßt er sich die Mühe nicht verdrießen,
noch in dem eigens dafür hinzugefügten siebenten Buche
die Hauptsätze seiner Geometrie auf eine Art zu beweisen,
welche von der Einmischung der Unendlichkeit frei bleibe.

- Diese Manier reduziert die Beweise
auf die vorhin angeführte gewöhnliche Form des Deckens der Figuren,
d. i., wie bemerkt worden,
der Vorstellung der Bestimmtheit als äußerer Raumgrenze.

Über diese Form des Deckens
kann zunächst noch diese Bemerkung gemacht werden,
daß sie überhaupt eine sozusagen kindliche Hilfe
für die sinnliche Anschauung ist.

In den elementarischen Sätzen über die Dreiecke
werden zwei solche nebeneinander vorgestellt,
und indem von ihren je ((367)) sechs Stücken
gewisse drei als gleich groß
mit den entsprechenden drei des anderen Dreiecks angenommen werden,
so wird gezeigt, daß solche Dreiecke einander kongruent seien,
d. i. jedes auch die übrigen drei Stücke gleich groß
mit denen des anderen habe,
- weil sie vermöge der Gleichheit nach jenen drei ersten einander decken.

Die Sache abstrakter gefaßt, so ist eben
um dieser Gleichheit jeden Paars
der in beiden einander entsprechenden Stücke
nur ein Dreieck vorhanden;
in diesem sind drei Stücke als bereits bestimmt angenommen,
woraus denn die Bestimmtheit auch der drei übrigen Stücke folgt.

Die Bestimmtheit wird auf diese Weise als in drei Stücken vollendet aufgezeigt;
für die Bestimmtheit als solche
sind somit die drei übrigen Stücke ein Überfluß,
der Überfluß der sinnlichen Existenz, d. i. der Anschauung der Kontinuität.

In solcher Form ausgesprochen, tritt hier die qualitative Bestimmtheit
im Unterschiede von dem hervor, was in der Anschauung vorliegt,
dem Ganzen als einem in sich kontinuierlichen;
das Decken läßt diesen Unterschied nicht zum Bewußtsein kommen.

Mit den Parallellinien und bei den Parallelogrammen tritt, wie bemerkt worden,
ein neuer Umstand, teils die Gleichheit nur der Winkel,
teils die Höhe der Figuren ein,
von welcher letzteren deren äußere Grenzen, die Seiten der Parallelogramme,
unterschieden sind.

Hierbei kommt die Zweideutigkeit zum Vorschein,
inwiefern bei diesen Figuren
außer der Bestimmtheit der einen Seite, der Grundlinie,
welche als äußere Grenze ist,
für die andere Bestimmtheit die andere äußere Grenze,
nämlich die andere Seite des Parallelogramms,
oder aber die Höhe zu nehmen ist.

Bei zwei solchen Figuren von einerlei Grundlinie und Höhe,
wovon das eine rechtwinklig ist, das andere sehr spitz,
damit zu den gegenüberstehenden sehr stumpfe Winkel hat,
kann der Anschauung letzteres leicht größer scheinen als das erstere,
insofern sie die vorliegende große Seite desselben als bestimmend nimmt
und nach der Vorstellungsweise Cavalieris
die Ebenen nach einer Menge von parallelen Linien,
durch welche sie ((368)) durchschnitten werden können, vergleicht;
die größere Seite könnte als eine Möglichkeit von mehreren Linien,
als die senkrechte Seite des Rechtecks gibt, angesehen werden.

Solche Vorstellung gibt jedoch keinen Einwurf
gegen Cavalieris Methode an die Hand;
denn die in beiden Parallelogrammen
für die Vergleichung vorgestellte Menge von parallelen Linien
setzt die Gleichheit ihrer Entfernung voneinander
oder von der Grundlinie zugleich voraus,
woraus folgt, daß die Höhe - und nicht die andere Seite des Parallelogramms -
das andere bestimmende Moment ist.

Dies ändert sich aber ferner,
wenn zwei Parallelogramme miteinander verglichen werden,
die von gleicher Höhe und Grundlinie sind,
aber nicht in einer Ebene liegen
und zu einer dritten Ebene verschiedene Winkel machen;
hier sind die parallelen Durchschnitte, die entstehen,
wenn man sich die dritte Ebene durch sie gelegt
und sich parallel mit sich fortbewegend vorstellt,
nicht mehr gleich weit voneinander entfernt,
und jene zwei Ebenen sind einander ungleich.

Cavalieri macht sehr sorgfältig auf diesen Unterschied,
den er als einen Unterschied
von transitus rectus und transitus obliquus der Unteilbaren bestimmt
(gleich in Exercitationes I, n. XII ff., wie schon in der Geometria I, II),
aufmerksam
und schneidet damit oberflächlichen Mißverstand ab,
der nach dieser Seite entstehen könnte.

Ich erinnere mich, daß Barrow in seinem oben angeführten Werke
(Lectiones geometricae II, p. 21),
indem er die Methode der Unteilbaren gleichfalls gebraucht
- jedoch sie bereits mit der von ihm aus auf seinen Schüler Newton
und die sonstigen mathematischen Zeitgenossen, darunter auch Leibniz,
übergegangenen Annahme der Gleichsetzbarkeit eines krummlinigen Dreiecks,
wie das sogenannte charakteristische ist,
mit einem geradlinigen, insofern beide unendlich, d. h. sehr klein seien,
versetzt und verunreinigt hat -,
einen eben dahingehenden Einwurf Tacquets °, eines damaligen
in neuen Methoden ((369)) gleichfalls tätigen, scharfsinnigen Geometers,
anführte.

Die von diesem gemachte Schwierigkeit bezieht sich ebenfalls darauf,
welche Linie, und zwar bei Berechnung konischer und sphärischer Oberflächen,
als Grundmoment der Bestimmung
für die auf Anwendung des Diskreten gestützte Betrachtung
genommen werden solle.

Tacquet wende gegen die Methode der Unteilbaren ein, daß,
wenn die Oberfläche eines rechtwinkligen Kegels berechnet werden sollte,
so werde nach jener atomistischen Methode das Dreieck des Kegels
als zusammengesetzt aus den geraden, mit der Grundlinie parallelen,
auf die Achse senkrechten Linien vorgestellt,
welche zugleich die Radien der Kreise sind,
aus denen die Oberfläche des Kegels bestehe.

Wenn nun diese Oberfläche als Summe der Peripherien
und diese Summe aus der Anzahl ihrer Radien,
d. i. der größe der Achse, der Höhe des Kegels, bestimmt werde,
so sei solches Resultat
mit der sonst von Archimed gelehrten

und bewiesenen Wahrheit im Widerspruch.

Barrow zeigt nun dagegen, daß für die Bestimmung der Oberfläche
nicht die Achse, sondern die Seite des Dreiecks des Kegels
als diejenige Linie genommen werden müsse,
deren Umdrehung die Oberfläche erzeuge
und welche daher, und nicht die Achse,
als die Größenbestimmtheit für die Menge der Peripherien
angenommen werden müsse.

Dergleichen Einwürfe oder Unsicherheiten
haben ihre Quelle allein in der gebrauchten unbestimmten Vorstellung
der unendlichen Menge von Punkten, aus denen die Linie,
oder von Linien, aus denen die Fläche usf. bestehend angesehen wird;
durch diese Vorstellung wird die wesentliche Größenbestimmtheit
der Linien oder Flächen in Schatten gestellt.

- Es ist die Absicht dieser Anmerkungen gewesen,
die affirmativen Bestimmungen,
die bei dem verschiedenen Gebrauch,
der von dem Unendlichkleinen in der Mathematik gemacht wird,
sozusagen im Hintergrunde bleiben,
aufzuweisen und sie aus der Nebulosität hervorzuheben,
in welche sie durch jene bloß negativ gehaltene Kategorie gehüllt werden.

Bei der unendlichen Reihe, wie in der Archimedischen Kreismessung, ((370))
bedeutet das Unendliche nichts weiter,
als daß das Gesetz der Fortbestimmung bekannt ist,
aber der sogenannte endliche Ausdruck, d. i. der arithmetische,
nicht gegeben [ist],
die Zurückführung des Bogens auf die gerade Linie
nicht bewerkstelligt werden kann;
diese Inkommensurabilität ist die qualitative Verschiedenheit derselben.

Die qualitative Verschiedenheit des Diskreten
mit dem Kontinuierlichen überhaupt
enthält gleichfalls eine negative Bestimmung,
welche sie als inkommensurabel erscheinen läßt
und das Unendliche herbeiführt, in dem Sinne,

daß das als diskret zu nehmende Kontinuierliche nun
kein Quantum nach seiner kontinuierlichen Bestimmtheit mehr haben soll.

Das Kontinuierliche, das arithmetisch als Produkt zu nehmen ist,
ist damit diskret an ihm selbst gesetzt,
nämlich in die Elemente, die seine Faktoren sind, zerlegt;
in diesen liegt seine Größenbestimmtheit;
sie sind als eben damit, daß sie diese Faktoren oder Elemente sind,
von einer niedrigeren Dimension und,
insofern die Potenzenbestimmtheit eintritt,
von einer niedrigeren Potenz als die größe,
deren Elemente oder Faktoren sie sind.

Arithmetisch erscheint dieser Unterschied als ein bloß quantitativer
- der Wurzel und der Potenz oder welcher Potenzenbestimmtheit es sei;
jedoch wenn der Ausdruck nur auf das Quantitative als solches geht,
z. B. $a : a^2$ oder $d * a^2 = 2a : a^2 = 2 : a$,
oder für das Gesetz des Falles, $t : at^2$,
so gibt er die nichtssagenden Verhältnisse von $1 : a$, $2 : a$, $1 : at$;
die Seiten müßten gegen ihre bloß quantitative Bestimmung
durch die unterschiedene qualitative Bedeutung
auseinandergehalten werden, wie $s : at^2$,
wodurch die größe als eine Qualität ausgesprochen wird,
als Funktion der größe einer anderen Qualität.

Hierbei steht dann bloß die quantitative Bestimmtheit vor dem Bewußtsein,
mit der nach ihrer Art ohne Schwierigkeit operiert wird,
und man kann kein Arges daran haben,
die größe einer Linie mit der größe einer anderen Linie zu multiplizieren;
aber die Multiplikation dieser selben Größen
gibt zugleich die qualitative Veränderung des Übergangs von Linie in Fläche;
insofern ((371)) tritt eine negative Bestimmung ein;
sie ist es, welche die Schwierigkeit veranlaßt,
die durch die Einsicht in ihre Eigentümlichkeit
und in die einfache Natur der Sache gelöst,
aber durch die Hilfe des Unendlichen, wodurch sie beseitigt werden soll,
vielmehr nur in Verworrenheit gesetzt und ganz unaufgelöst erhalten wird.

Drittes Kapitel Das quantitative Verhältnis

Die Unendlichkeit des Quantums ist dahin bestimmt worden,
daß sie das negative Jenseits desselben ist,
das es aber an ihm selbst hat.

Dies Jenseits ist das Qualitative überhaupt.

Das unendliche Quantum ist als die Einheit beider Momente,
der quantitativen und qualitativen Bestimmtheit,
zunächst Verhältnis.

Im Verhältnisse hat das Quantum
nicht mehr eine nur gleichgültige Bestimmtheit,
sondern ist qualitativ bestimmt als schlechthin bezogen auf sein Jenseits.

Es kontinuiert sich in sein Jenseits;
dieses ist zunächst ein anderes Quantum überhaupt.

Aber wesentlich sind sie nicht als äußerliche Quanta aufeinander bezogen,
sondern jedes hat seine Bestimmtheit in dieser Beziehung auf das andere.

Sie sind so in diesem ihrem Anderssein in sich zurückgekehrt;
was jedes ist, ist es in dem Anderen;
das Andere macht die Bestimmtheit eines jeden aus.

- Das Hinausgehen des Quantums über sich hat also jetzt diesen Sinn,
daß es sich weder nur in ein Anderes noch in sein abstraktes Anderes,
in sein negatives Jenseits veränderte,
sondern darin zu seiner Bestimmtheit gelangt ist;
es findet sich selbst in seinem Jenseits, welches ein anderes Quantum ist.

Die Qualität des Quantums, seine Begriffsbestimmtheit,
ist seine Äußerlichkeit überhaupt,
und im Verhältnis ist es nun so gesetzt, in seiner Äußerlichkeit,
an einem anderen Quantum seine Bestimmtheit zu haben,
in seinem Jenseits das zu sein, was es ist. ((372))

Es sind Quanta, welche die Beziehung, die sich ergab, aufeinander haben.

Diese Beziehung ist selbst auch eine größe;
das Quantum ist nicht nur im Verhältnis,
sondern es selbst ist als Verhältnis gesetzt;
es ist ein Quantum überhaupt,
das jene qualitative Bestimmtheit innerhalb seiner hat.

So als Verhältnis drückt es sich als in sich geschlossene Totalität
und seine Gleichgültigkeit gegen die Grenze aus,
dadurch daß es die Äußerlichkeit seines Bestimmtseins
innerhalb seiner selbst hat
und in ihr nur auf sich bezogen, somit an ihm selbst unendlich ist.

Das Verhältnis überhaupt ist
1. das direkte Verhältnis.

In demselben tritt das Qualitative noch nicht als solches für sich heraus;
es ist noch in keiner weiteren Weise als der des Quantums,
daß dieses in seiner Äußerlichkeit selbst
seine Bestimmtheit zu haben gesetzt ist.

- Das quantitative Verhältnis ist an sich der Widerspruch
der Äußerlichkeit und der Beziehung auf sich selbst,
des Bestehens der Quantorum und der Negation derselben;
- er hebt sich auf, indem zunächst
2. im indirekten Verhältnisse
die Negation des einen Quantums als solche
mit in der Veränderung des anderen
und die Veränderlichkeit des direkten Verhältnisses selbst gesetzt wird;
3. im Potenzenverhältnis aber macht sich
die in ihrem Unterschiede sich auf sich beziehende Einheit
als einfache Selbstproduktion des Quantums geltend;
dies Qualitative selbst endlich in einfacher Bestimmung,
und identisch mit dem Quantum gesetzt,
wird das Maß.

Über die Natur der folgenden Verhältnisse
ist vieles in den vorhergehenden Anmerkungen,
welche das Unendliche der Quantität,
d. i. das qualitative Moment an derselben betreffen, antizipiert worden;
es bleibt daher nur der abstrakte Begriff
dieser Verhältnisse auseinanderzusetzen. ((373))

A. DAS DIREKTE VERHÄLTNIS

1. Im Verhältnisse, welches als unmittelbar das direkte ist,
liegt die Bestimmtheit des einen Quantums
gegenseitig in der Bestimmtheit des anderen.

Es ist nur eine Bestimmtheit oder Grenze beider,
die selbst Quantum ist,
der Exponent des Verhältnisses.

2. Der Exponent ist irgendein Quantum;
aber in seiner Äußerlichkeit an ihm selbst sich auf sich beziehendes,
qualitativ bestimmtes Quantum ist er nur,
insofern er den Unterschied seiner,
sein Jenseits und Anderssein an ihm selbst hat.

Dieser Unterschied des Quantums an ihm selbst aber
ist der Unterschied der Einheit und der Anzahl;
die Einheit - das Fürsichbestimmtsein,
die Anzahl - das gleichgültige Hin- und Hergehen an der Bestimmtheit,
die äußere Gleichgültigkeit des Quantums.

Einheit und Anzahl waren zuerst die Momente des Quantums;
jetzt im Verhältnisse, dem insofern realisierten Quantum,
erscheint jedes seiner Momente als ein eigenes Quantum
und als Bestimmungen seines Daseins,

als Begrenzungen gegen die sonst nur äußerliche,
gleichgültige Größenbestimmtheit.

Der Exponent ist dieser Unterschied als einfache Bestimmtheit,
d. h. er hat unmittelbar die Bedeutung beider Bestimmungen an ihm selbst.

Er ist erstens Quantum; so ist er [?auch] die Anzahl.

Wenn die eine Seite des Verhältnisses, welche als Einheit genommen wird,
als numerisches Eins ausgedrückt ist - und sie gilt nur für solches -,
so ist die andere, die Anzahl, das Quantum des Exponenten selbst.

Zweitens ist er die einfache Bestimmtheit
als das Qualitative der Seiten des Verhältnisses;
wenn das Quantum der einen bestimmt ist,
ist auch das andere durch den Exponenten bestimmt,
und es ist völlig gleichgültig, wie das erste bestimmt wird;
es hat als für sich bestimmtes Quantum keine Bedeutung mehr,
sondern kann ebensogut jedes andere sein,
ohne die Bestimmtheit des Verhältnisses zu ändern,
die allein auf dem Exponenten beruht.

Das eine, welches als Einheit genommen ist, ((374))
bleibt, wie groß es werde, immer Einheit,
und das andere, wie groß es ebenso dabei werde,
muss dieselbe Anzahl jener Einheit bleiben.

3. Hiernach machen beide eigentlich nur ein Quantum aus;
das eine hat gegen das andere nur den Wert der Einheit, nicht einer Anzahl;
das andere nur den der Anzahl;
nach ihrer Begriffsbestimmtheit sind sie selbst somit nicht vollständige Quanta.

Diese Unvollständigkeit aber ist eine Negation an ihnen,
und dies nicht nach ihrer Veränderlichkeit überhaupt,
nach der das eine (und jedes ist eines der beiden)
alle mögliche größe annehmen kann,
sondern nach der Bestimmung, daß, wenn das eine verändert wird,
das andere um ebensoviel [?Eh+] vermehrt oder vermindert wird;

dies heißt, wie gezeigt, nur das eine,
die Einheit, wird als Quantum verändert,
die andere Seite, die Anzahl, bleibt dasselbe Quantum von Einheiten
aber auch jene bleibt ebenso nur als Einheit geltend,
sie werde als Quantum verändert, wie sie wolle.

Jede Seite ist so nur eines der beiden Momente des Quantums,
und die Selbständigkeit, die zu dessen Eigentümlichkeit gehört,
ist an sich negiert;
in diesem qualitativen Zusammenhange
sind sie als negative gegeneinander zu setzen.

Der Exponent soll das vollständige Quantum sein,
indem die Bestimmung der beiden Seiten in ihm zusammenläuft;
er hat aber in der Tat als Quotient selbst nur den Wert
der Anzahl oder der Einheit.

Es ist keine Bestimmung vorhanden,
welche der Seiten des Verhältnisses als die Einheit
oder als die Anzahl genommen werden müsse;
die eine, das Quantum B an dem Quantum A als der Einheit gemessen,
so ist der Quotient C die Anzahl solcher Einheiten;
aber A selbst als Anzahl genommen,
ist der Quotient C die Einheit,
welche zu der Anzahl A für das Quantum B erfordert wird;
dieser Quotient ist als Exponent somit nicht als das gesetzt, was er sein soll:
das Bestimmende des Verhältnisses oder als seine qualitative Einheit.

Als diese ist er nur gesetzt, insofern er den Wert hat,
die Einheit der beiden Momente, der Einheit ((375)) und der Anzahl, zu sein.

Indem diese Seiten zwar als Quanta,
wie sie in dem expliziten Quantum, dem Verhältnisse, sein sollen,
vorhanden sind,
aber zugleich nur in dem Werte,
den sie als dessen Seiten haben sollen, unvollständige Quanta zu sein
und nur als eines jener qualitativen Momente zu gelten,
so sind sie mit dieser ihrer Negation zu setzen;
womit ein seiner Bestimmung entsprechenderes reelleres Verhältnis entsteht,

worin der Exponent die Bedeutung des Produkts derselben hat;
nach dieser Bestimmtheit ist es das umgekehrte Verhältnis.

B. DAS UMGEKEHRTE VERHÄLTNIS

1. Das Verhältnis, wie es sich nun ergeben,
ist das aufgehobene direkte Verhältnis;
es war das unmittelbare, somit noch nicht wahrhaft bestimmte;
nunmehr ist die Bestimmtheit so hinzugekommen,
daß der Exponent als Produkt, Einheit der Einheit und der Anzahl, gilt.

Nach der Unmittelbarkeit konnte er gleichgültig
ebensowohl als Einheit wie als Anzahl genommen werden,
wie vorhin gezeigt worden,
- womit er auch nur als Quantum überhaupt
und damit vorzugsweise als Anzahl war;
die eine Seite war die Einheit und als Eins zu nehmen,
zu welcher die andere eine fixe Anzahl sei,
die zugleich der Exponent ist;
dessen Qualität war somit nur dies,
daß dies Quantum als festes genommen [wird]
oder vielmehr das Feste nur den Sinn des Quantums hat.

In dem umgekehrten Verhältnisse nun
ist der Exponent gleichfalls als Quantum ein unmittelbares,
und irgendeines als festes angenommen.

Aber dies Quantum ist nicht fixe Anzahl
zu dem Eins des anderen Quantums im Verhältnisse;
dieses im vorhergehenden feste Verhältnis
ist nun vielmehr als veränderlich gesetzt;
wenn zum Eins der einen Seite ein anderes Quantum genommen wird,

so bleibt nun die andere nicht mehr dieselbe Anzahl von Einheiten der ersten.

Im direkten Verhältnisse ist diese Einheit
nur das Gemeinschaftliche beider Seiten;
sie als solche kontinuiert sich in die ((376)) andere Seite, in die Anzahl;
die Anzahl selbst für sich oder der Exponent ist gegen die Einheit gleichgültig.

Wie nunmehr aber die Bestimmtheit des Verhältnisses ist
wird die Anzahl als solche
gegen das Eins, zu dem sie die andere Seite des Verhältnisses ausmacht,
verändert;
je nachdem zum Eins ein anderes Quantum genommen wird,
wird sie eine andere.

Der Exponent ist daher zwar auch nur ein unmittelbares,
nur beliebig als fest angenommenes Quantum,
aber er erhält sich nicht als solches in der Seite des Verhältnisses,
sondern diese und damit das direkte Verhältnis der Seiten ist veränderlich.

Hiermit ist, in dem nunmehrigen Verhältnisse,
der Exponent als das bestimmende Quantum
negativ gegen sich als Quantum des Verhältnisses,
hiermit als qualitativ, als Grenze gesetzt,
daß also das Qualitative für sich
im Unterschied gegen das Quantitative hervortritt.

- In dem direkten Verhältnisse ist die Veränderung der beiden Seiten
nur die eine Veränderung des Quantums,
als welches die Einheit, die das Gemeinschaftliche ist, genommen wird,
um soviel also die eine Seite vergrößert oder vermindert wird,
um soviel auch die andere;
das Verhältnis selbst
ist gegen diese Veränderung gleichgültig,
sie ist ihm äußerlich.

Im indirekten Verhältnisse aber ist die Veränderung,
obgleich nach dem gleichgültigen quantitativen Momente auch beliebig,
innerhalb des Verhältnisses gehalten
und auch dies beliebige quantitative Hinausgehen

durch die negative Bestimmtheit des Exponenten
als durch eine Grenze beschränkt.

2. Diese qualitative Natur des indirekten Verhältnisses ist noch näher,
nämlich in ihrer Realisation zu betrachten
und die Verwicklung des Affirmativen mit dem Negativen,
die darin enthalten ist, auseinanderzusetzen.

- Es ist das Quantum gesetzt als qualitativ das Quantum,
d. i. sich selbst bestimmend, als Grenze seiner an ihm sich
darstellend.

Es ist hiermit erstens eine unmittelbare größe als einfache Bestimmtheit,
das Ganze als seiendes, affirmatives Quantum.

Aber zweitens ist diese unmittelbare Bestimmtheit zugleich ((377)) Grenze;
dafür ist es in zwei Quanta unterschieden,
die zunächst andere gegeneinander sind,
- aber als deren qualitative Bestimmtheit, und zwar dieselbe als vollständig,
ist es die Einheit der Einheit und der Anzahl,
Produkt, dessen Faktoren sie sind.

So ist der Exponent ihres Verhältnisses
einesteils in ihnen identisch mit sich und das Affirmative derselben,
wonach sie Quanta sind;
andernteils ist er als die an ihnen gesetzte Negation die Einheit an ihnen,
nach der zunächst jedes ein unmittelbares, begrenztes Quantum überhaupt,
zugleich so ein begrenztes ist,
daß es nur an sich identisch mit seinem Anderen ist.

Drittens ist er, als die einfache Bestimmtheit,
die negative Einheit dieser seiner Unterscheidung in die zwei Quanta
und die Grenze ihres gegenseitigen Begrenzens.

Nach diesen Bestimmungen
begrenzen sich die beiden Momente innerhalb des Exponenten
und sind das eine das Negative des anderen,
da er ihre bestimmte Einheit ist;

das eine wird um sovielmal kleiner, als das andere größer wird;
jedes hat insofern seine größe, als es die des anderen an ihm hat,
die dem anderen mangelt.

Jede kontinuiert sich auf diese Weise negativ in die andere;
soviel sie an Anzahl ist, hebt sie an der anderen als Anzahl auf
und ist, was sie ist, nur durch die Negation oder Grenze,
die an ihr von der anderen gesetzt wird.

Jede enthält auf diese Weise auch die andere und ist an ihr gemessen,
denn jede soll nur das Quantum sein, das die andere nicht ist;
für den Wert jeder ist die größe der anderen unentbehrlich
und damit untrennbar von ihr.

Diese Kontinuität jeder in der anderen
macht das Moment der Einheit aus, wodurch sie im Verhältnisse sind,
- der einen Bestimmtheit, der einfachen Grenze, die der Exponent ist.

Diese Einheit, das Ganze, macht das Ansichsein einer jeden aus,
von dem ihre vorhandene größe unterschieden ist,
nach welcher jede nur ist, insofern sie der anderen
von ((378)) ihrem gemeinsamen Ansichsein, dem Ganzen, entzieht.

Aber sie kann nur so viel, als sie diesem Ansichsein gleichmacht,
der anderen entziehen;
sie hat an dem Exponent ihr Maximum,
der nach der angegebenen zweiten Bestimmung
die Grenze ihrer gegenseitigen Begrenzung ist.

Und indem jede nur insofern Moment des Verhältnisses ist,
als sie die andere begrenzt und damit von der anderen begrenzt wird,
so verliert sie diese ihre Bestimmung,
indem sie sich ihrem Ansichsein gleichmacht;
die andere größe wird nicht nur darin Null,
sondern sie selbst verschwindet,
da sie nicht bloßes Quantum, sondern, was sie als solches ist,
nur als solches Verhältnismoment sein soll.

So ist jede Seite der Widerspruch

der Bestimmung als ihres Ansichseins,
d. i. der Einheit des Ganzen, das der Exponent ist,
und der Bestimmung als Verhältnismomentes;
dieser Widerspruch ist wieder die Unendlichkeit
in einer neuen eigentümlichen Form.

Der Exponent ist Grenze der Seiten seines Verhältnisses,
innerhalb deren sie gegeneinander zu- und abnehmen,
dem sie nach der affirmativen Bestimmtheit, die er als Quantum ist,
nicht gleich werden können.

So als Grenze ihres gegenseitigen Begrenzens ist er
a) ihr Jenseits,
dem sie sich unendlich nähern, aber das sie nicht erreichen können.

Diese Unendlichkeit, als in der sie sich ihm nähern,
ist die schlechte des unendlichen Progresses;
sie ist selbst endlich,
hat in ihrem Gegenteil, in der Endlichkeit
jeder Seite und des Exponenten selbst, ihre Schranke
und ist daher nur Näherung.

Aber ß) die schlechte Unendlichkeit
ist hier zugleich gesetzt als das, was sie in Wahrheit ist,
nämlich nur das negative Moment überhaupt,
nach welchem der Exponent gegen die unterschiedenen Quanta des Verhältnisses
die einfache Grenze als das Ansichsein ist,
auf das ihre Endlichkeit, als das schlechthin Veränderliche, bezogen wird,
aber schlechthin von ihnen verschieden, als ihre Negation, bleibt.

Dies Unendliche, dem sich dieselben nur annähern können,
ist dann gleichfalls als affirmatives Diesseits vorhanden und gegenwärtig,
- das simple Quantum des Exponenten.

Darin ist ((379)) das Jenseits,
mit dem die Seiten des Verhältnisses behaftet sind, erreicht;
es ist an sich die Einheit beider
oder damit an sich die andere Seite einer jeden;
denn jede hat nur so viel Wert, als die andere nicht hat;

ihre ganze Bestimmtheit liegt so in der anderen,
und dies ihr Ansichsein ist als affirmative Unendlichkeit einfach der Exponent.

3. Hiermit aber hat sich der Übergang des umgekehrten Verhältnisses
in eine andere Bestimmung ergeben, als es zunächst hatte.

Diese bestand darin, daß ein Quantum als unmittelbares
zugleich auf ein anderes die Beziehung hat,
um so viel größer zu sein, als dieses kleiner ist,
durch negatives Verhalten gegen das andere zu sein, was es ist;
ebenso ist eine dritte größe
die gemeinsame Schranke dieses ihres Größerwerdens.

Diese Veränderung ist hier, im Gegensatze gegen das Qualitative
als feste Grenze, ihre Eigentümlichkeit;
sie haben die Bestimmung von veränderlichen Größen,
für welche jenes Feste ein unendliches Jenseits ist.

Die Bestimmungen aber, die sich gezeigt
und die wir zusammenzufassen haben,
sind nicht nur, daß dies unendliche Jenseits
zugleich als ein gegenwärtiges und irgendein endliches Quantum ist,
sondern daß seine Festigkeit,
  wodurch es solches unendliches Jenseits gegen das Quantitative ist
  und die das Qualitative des Seins
  nur als abstrakte Beziehung auf sich selbst ist,
sich als Vermittlung seiner in seinem Anderen,
dem Endlichen des Verhältnisses,
mit sich selbst entwickelt hat.

Das Allgemeine hiervon liegt darin,
daß überhaupt das Ganze als Exponent
die Grenze des gegenseitigen Begrenzens der beiden Glieder [ist],
also die Negation der Negation, somit die Unendlichkeit,
affirmatives Verhalten zu sich selbst, gesetzt ist.

Das Bestimmtere ist,
daß an sich der Exponent schon als Produkt

die Einheit der Einheit und der Anzahl,
jedes der beiden Glieder
aber [?jeweils] nur das eine dieser beiden Momente ist,
wodurch er sie also in sich schließt
und in ihnen an sich sich auf sich bezieht.

Aber der Unterschied ist im umgekehrten Verhältnisse
zur Äußerlichkeit des quantitativen Seins entwickelt
und das Qualitative nicht bloß das ((380)) Feste,
noch nur die Momente unmittelbar in sich einschließend,
sondern in dem außersichseienden Anderssein
sich mit sich zusammenschließend vorhanden.

Diese Bestimmung ist es,
die sich als Resultat in den Momenten, die sich gezeigt, heraushebt.

Der Exponent ergibt sich nämlich als das Ansichsein,
dessen Momente in Quantis
und [?das] in deren Veränderlichkeit überhaupt realisiert ist;
die Gleichgültigkeit ihrer Größen in ihrer Veränderung
stellt sich als unendlicher Progreß dar;
was dem zugrunde liegt, ist,
daß in ihrer Gleichgültigkeit dies ihre Bestimmtheit ist,
ihren Wert in dem Werte des anderen zu haben,
somit a) nach der affirmativen Seite ihres Quantums
an sich das Ganze des Exponenten zu sein.

Ebenso haben sie ß) für ihr negatives Moment, für ihr gegenseitiges Begrenzen
die größe des Exponenten;
ihre Grenze ist die seinige.

Daß sie keine andere immanente Grenze,
eine feste Unmittelbarkeit, mehr haben,
ist in dem unendlichen Progresse ihres Daseins und ihrer Begrenzung,
in der Negation jedes besonderen Wertes gesetzt.

Diese ist hiernach die Negation des Außersichseins des Exponenten,
das in ihnen dargestellt ist,
und dieser,
d. i. zugleich selbst ein Quantum überhaupt und in Quanta auch ausgelegt,

ist damit gesetzt als das in der Negation ihres gleichgültigen Bestehens
sich Erhaltende, mit sich Zusammengehende,
so das Bestimmende solchen Hinausgehens über sich zu sein.

Das Verhältnis ist hiermit zum Potenzenverhältnis bestimmt.

C. POTENZENVERHÄLTNIS

1. Das Quantum in seinem Anderssein sich identisch mit sich setzend,
sein Hinausgehen über sich selbst bestimmend,
ist zum Fürsichsein gekommen.

So qualitative Totalität, indem sie sich als entwickelt setzt,
hat sie zu ihren Momenten die Begriffsbestimmungen der Zahl,
die Einheit und die Anzahl;
die letztere ist noch im umgekehrten Verhältnisse
eine nicht durch die erstere selbst als solche,
sondern anderswoher, ((381)) durch ein Drittes bestimmte Menge;
nun ist sie nur durch jene bestimmt gesetzt.

Dies ist der Fall im Potenzenverhältnisse,
wo die Einheit, welche Anzahl an ihr selbst ist,
zugleich die Anzahl gegen sich als Einheit ist.

Das Anderssein, die Anzahl der Einheiten, ist die Einheit selbst.

Die Potenz ist eine Menge von Einheiten, deren jede diese Menge selbst ist.

Das Quantum als gleichgültige Bestimmtheit verändert sich;
aber insofern diese Veränderung ein Erheben in die Potenz ist,
ist dies sein Anderssein rein durch sich selbst begrenzt.

- Das Quantum ist so in der Potenz

als in sich selbst zurückgekehrt gesetzt;
es ist unmittelbar es selbst und auch sein Anderssein.

Der Exponent dieses Verhältnisses ist nicht mehr ein unmittelbares Quantum
wie im direkten und auch im umgekehrten Verhältnisse.

Er ist im Potenzenverhältnis ganz qualitativer Natur,
diese einfache Bestimmtheit,
daß die Anzahl die Einheit selbst,
das Quantum in seinem Anderssein mit sich selbst identisch ist.

Darin liegt zugleich die Seite seiner quantitativen Natur,
daß die Grenze oder Negation nicht als unmittelbar Seiendes,
sondern das Dasein als in sein Anderssein kontinuiert gesetzt ist;
denn die Wahrheit der Qualität ist eben dies,
Quantität, die unmittelbare Bestimmtheit als aufgehobene, zu sein.

2. Das Potenzenverhältnis erscheint zunächst
als eine äußere Veränderung, in welche irgendein Quantum versetzt wird;
es hat aber die engere Beziehung auf den Begriff des Quantums,
daß dieses in dem Dasein,
zu welchem es in jenem Verhältnisse fortgebildet ist,
denselben erreicht, ihn auf vollständige Weise realisiert hat;
dies Verhältnis ist die Darstellung dessen, was das Quantum an sich ist,
und drückt dessen Bestimmtheit oder Qualität aus,
wodurch es sich von anderem unterscheidet.

Das Quantum ist die gleichgültige, als aufgehoben gesetzte Bestimmtheit,
d. h. die Bestimmtheit als Grenze, welche ebensosehr keine ist,
in ihr Anderssein sich kontinuiert, in ihm sich also identisch mit sich bleibt;
so ist es im Potenzenverhältnis gesetzt;
sein Anderssein, Hinausgehen ((382)) über sich in ein anderes Quantum,
als durch es selbst bestimmt.

Vergleichen wir den Fortgang dieser Realisierung
in den bisherigen Verhältnissen,
so ist die Qualität des Quantums,

als Unterschied seiner von sich selbst gesetzt zu sein,
überhaupt dies, Verhältnis zu sein.

Als direktes Verhältnis ist es als solcher gesetzte Unterschied
nur erst überhaupt oder unmittelbar,
so daß seine Beziehung auf sich selbst,
die es gegen seine Unterschiede als der Exponent hat,
nur als die Festigkeit einer Anzahl der Einheit gilt.

Im umgekehrten Verhältnis ist das Quantum
in negativer Bestimmung ein Verhalten seiner zu sich selbst,
- zu sich als seiner Negation,
in der es aber seinen Wert hat;
als affirmative Beziehung auf sich ist es ein Exponent,
der als Quantum nur an sich das Bestimmende seiner Momente ist.

Im Potenzenverhältnis aber ist es
in dem Unterschiede als seiner von sich selbst vorhanden.

Die Äußerlichkeit der Bestimmtheit ist die Qualität des Quantums;
diese Äußerlichkeit ist so nun seinem Begriffe gemäß
als sein eigenes Bestimmen, als seine Beziehung auf sich selbst,
seine Qualität gesetzt.

3. Damit aber, daß das Quantum gesetzt ist,
wie es seinem Begriffe gemäß ist,
ist es in eine andere Bestimmung übergegangen
oder, wie es auch ausgedrückt werden kann,
daß seine Bestimmung nun auch als die Bestimmtheit,
das Ansichsein auch als Dasein ist.

Es ist als Quantum,
insofern die Äußerlichkeit oder Gleichgültigkeit des Bestimmtseins
(daß es das ist, wie man sagt, was vergrößert oder vermindert werden kann)
nur einfach oder unmittelbar gilt und gesetzt ist;
es ist zu seinem Anderen, der Qualität, geworden,
insofern jene Äußerlichkeit nun als vermittelt durch es selbst,
so als ein Moment gesetzt ist,
daß es eben in ihr sich auf sich selbst bezieht,

Sein als Qualität ist.

Zunächst erscheint also die Quantität als solche der Qualität gegenüber;
aber die Quantität ist selbst eine Qualität,
sich auf sich beziehende Bestimmtheit überhaupt,
unterschieden von der ihr anderen Bestimmtheit,
von der Qualität als ((383)) solcher.

Allein sie ist nicht nur eine Qualität,
sondern die Wahrheit der Qualität selbst ist die Quantität;
jene hat sich als in diese übergehend gezeigt.

Die Quantität ist dagegen in ihrer Wahrheit
die in sich selbst zurückgekehrte, nicht gleichgültige Äußerlichkeit.

So ist sie die Qualität selbst,
so daß außer dieser Bestimmung
nicht die Qualität als solche noch etwas wäre.

- Daß die Totalität gesetzt sei, dazu gehört der gedoppelte Übergang,
nicht nur der der einen Bestimmtheit in ihre andere,
sondern ebenso der Übergang dieser anderen, ihr Rückgang, in die erste.

Durch den ersten ist nur erst an sich die Identität beider vorhanden;
- die Qualität ist in der Quantität enthalten,
die aber damit noch eine einseitige Bestimmtheit ist.

Daß diese umgekehrt ebenso in der ersten enthalten,
sie ebenso nur als aufgehobene ist,
ergibt sich im zweiten Übergang, - der Rückkehr in das erste;
diese Bemerkung über die Notwendigkeit des doppelten Übergangs
ist von großer Wichtigkeit für das Ganze der wissenschaftlichen Methode.

Das Quantum nunmehr nicht mehr als gleichgültige
oder äußerliche Bestimmung,
sondern so, daß es ebenso als solche aufgehoben und die Qualität
und das ist, wodurch etwas das ist, was es ist,
ist die Wahrheit des Quantums, Maß zu sein.

Anmerkung:

Es ist oben, in den Anmerkungen über das quantitativ Unendliche,
auseinandergesetzt worden,
daß dieses sowie die Schwierigkeiten, die sich darüber ergeben,
in dem qualitativen Momente, das sich im quantitativen hervortut,
ihren Ursprung haben,
und wie das Qualitative des Potenzenverhältnisses
insbesondere in die mannigfaltigen Entwicklungen und Verwicklungen ausgeht;
als der Grundmangel, der die Auffassung des Begriffes verhindert,
wurde aufgezeigt, daß ((384)) bei dem Unendlichen
nur nach der negativen Bestimmung, die Negation des Quantums zu sein,
stehengeblieben
und nicht zu der einfachen Bestimmung, dem Affirmativen,
daß dieses das Qualitative ist,
fortgegangen wird.

- Hier bleibt nur übrig, noch eine Bemerkung
über die in der Philosophie geschehene Einmischung
von Formen des Quantitativen in die reinen qualitativen Formen des Denkens
zu machen.

Besonders ist es das Potenzenverhältnis,
welches in neuerer Zeit auf Begriffsbestimmungen angewendet worden ist.

Der Begriff in seiner Unmittelbarkeit wurde die erste Potenz,
in seinem Anderssein oder der Differenz,
dem Dasein seiner Momente die zweite,
und in seiner Rückkehr in sich oder als Totalität die dritte Potenz genannt.

- Hiergegen fällt sogleich auf, daß die Potenz, so gebraucht,
eine Kategorie ist, die dem Quantum wesentlich angehört;
- es ist bei diesen Potenzen nicht an die potentia, XXX des Aristoteles gedacht.

So drückt das Potenzenverhältnis die Bestimmtheit aus,
wie dieselbe als der Unterschied,
wie er im besonderen Begriffe des Quantums ist,
zu seiner Wahrheit gelangt,
aber nicht, wie derselbe am Begriffe als solchem ist.

Das Quantum enthält die Negativität, welche zur Natur des Begriffs gehört,
noch gar nicht in dessen eigentümlicher Bestimmung gesetzt;
Unterschiede, die dem Quantum zukommen,
sind oberflächliche Bestimmungen für den Begriff selbst;
sie sind noch weit entfernt, bestimmt zu sein, wie sie es im Begriffe sind.

Es ist in der Kindheit des Philosophierens, daß, wie von Pythagoras, Zahlen
- und erste, zweite Potenz usf. haben insofern vor Zahlen nichts voraus -
zur Bezeichnung allgemeiner, wesentlicher Unterschiede
gebraucht worden sind.

Es war dies eine Vorstufe des reinen denkenden Erfassens;
nach Pythagoras erst sind die Gedankenbestimmungen selbst erfunden,
d. i. für sich zum Bewußtsein gebracht worden.

Aber von solchen weg zu Zahlenbestimmungen zurückzugehen,
gehört einem sich unvermögend fühlenden Denken an,
das nun im Gegensatze gegen vorhandene philosophische Bildung,
die an Gedankenbestimmungen gewohnt ist,
selbst ((385)) das Lächerliche hinzufügt,
jene Schwäche für etwas Neues, Vornehmes
und für einen Fortschritt geltend machen zu wollen.

Insofern der Potenzenausdruck nur als Symbol gebraucht wird,
so ist dagegen sowenig zu sagen als gegen die Zahlen
oder Symbole anderer Art für Begriffe;
aber zugleich ebensoviel als gegen alle Symbolik überhaupt,
in welcher reine Begriffs- oder philosophische Bestimmungen
dargestellt werden sollen.

Die Philosophie bedarf solche Hilfe nicht,
weder aus der sinnlichen Welt, noch aus der vorstellenden Einbildungskraft,

auch nicht aus Sphären ihres eigentümlichen Bodens,
welche untergeordnet sind, deren Bestimmungen daher
nicht für höhere Kreise und für das Ganze passen.

Das letztere geschieht, wenn überhaupt Kategorien des Endlichen
auf das Unendliche angewendet werden;
die geläufigen Bestimmungen von Kraft oder Substantialität,
Ursache und Wirkung usf. sind gleichfalls nur Symbole
für den Ausdruck z. B. lebendiger oder geistiger Verhältnisse,
d. i. unwahre Bestimmungen für dieselben,
so noch mehr die Potenzen des Quantums
und gezählte Potenzen für dergleichen
und für spekulative Verhältnisse überhaupt.

- Wenn Zahlen, Potenzen, das mathematisch Unendliche und dergleichen
nicht als Symbole, sondern als Formen für philosophische Bestimmungen
und damit selbst als philosophische Formen sollen gebraucht werden,
so müßte vor allem ihre philosophische Bedeutung,
d. i. ihre Begriffsbestimmtheit aufgezeigt werden.

Geschieht dies, so sind sie selbst überflüssige Bezeichnungen;
die Begriffsbestimmtheit bezeichnet sich selbst,
und ihre Bezeichnung ist allein die richtige und passende.

Der Gebrauch jener Formen ist darum weiter nichts
als ein bequemes Mittel, es zu ersparen,
die Begriffsbestimmungen zu fassen, anzugeben und zu rechtfertigen. ((386))